

2023-2024 学年广西南宁市第二学期高三第一次网上综合模拟测试数学试题试卷

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 过 F_1 的直线交椭圆于 A 、 B 两点, 交 y 轴于点 M ,

若 F_1 、 M 是线段 AB 的三等分点, 则椭圆的离心率为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

2. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 中的 a_1 、 a_{4039} 是函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - 3$ 的极值点, 则 $\log_{\sqrt{6}} a_{2020} =$ ()

- A. -1 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

3. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的顶点都在球 O 的球面上, $PA = \sqrt{2}$, $PB = \sqrt{14}$, $AB = 4$, $CA = CB = \sqrt{10}$, 面 $PAB \perp$ 面 ABC , 则球 O 的表面积为 ()

- A. $\frac{10\pi}{3}$ B. $\frac{25\pi}{6}$ C. $\frac{40\pi}{9}$ D. $\frac{50\pi}{3}$

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3 = 7$, $S_3 = 9$, 则 $a_{10} =$ ()

- A. 25 B. 32 C. 35 D. 40

5. 已知 $a = \sqrt[4]{6}$, $b = \log_{\frac{5}{4}} \frac{4}{21}$, $c = \left(\frac{1}{3}\right)^{2.9}$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $c > a > b$

6. 已知 i 是虚数单位, 若 $z = 1 + ai$, $z\bar{z} = 2$, 则实数 $a =$ ()

- A. $-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$ B. -1 或 1 C. 1 D. $\sqrt{2}$

7. 设双曲线 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ 的一条渐近线为 $y = -2x$, 且一个焦点与抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点相同, 则此双曲线的方程为

()

A. $\frac{5}{4}x^2 - 5y^2 = 1$ B. $5y^2 - \frac{5}{4}x^2 = 1$ C. $\frac{5}{4}y^2 - 5x^2 = 1$ D. $5x^2 - \frac{5}{4}y^2 = 1$

8. 已知 i 为虚数单位, 若复数 $z = \frac{1+2i}{2-i} + 1$, 则 $\bar{z} =$

A. $\frac{9}{5} + i$ B. $1 - i$

C. $1 + i$ D. $-i$

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $2^{f(\frac{m}{n})} \cdot 2^{f(n)} = 4^{\frac{f(m)}{2}}$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$. 若 $f(4) = 2$, 则函数 $f(x)$ 在 $[1, 16]$ 上的最大值为 ()

A. 4 B. 6 C. 3 D. 8

10. 下列函数中, 值域为 R 且为奇函数的是 ()

A. $y = x + 2$ B. $y = \sin x$ C. $y = x - x^3$ D. $y = 2^x$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AD} =$ ()

A. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ B. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

12. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 抛物线上任意一点 P , 且 $PQ \perp y$ 轴交 y 轴于点 Q , 则 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最小值为 ()

A. $-\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. -1 D. 1

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知集合 $A = \{x | 0 < x < 2\}$, $B = \{x | -1 < x < 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

14. 若 $(x^2 - 2x - 3)^n$ 的展开式中所有项的系数之和为 256, 则 $n =$ _____, 含 x^2 项的系数是_____ (用数字作答).

15. 设 $f(x) = e^{tx}$ ($t > 0$), 过点 $P(t, 0)$ 且平行于 y 轴的直线与曲线 $C: y = f(x)$ 的交点为 Q , 曲线 C 过点 Q 的切线交 x 轴于点 R , 若 $S(1, f(1))$, 则 $\triangle PRS$ 的面积的最小值是_____.

16. 根据如图所示的伪代码, 输出 I 的值为_____.

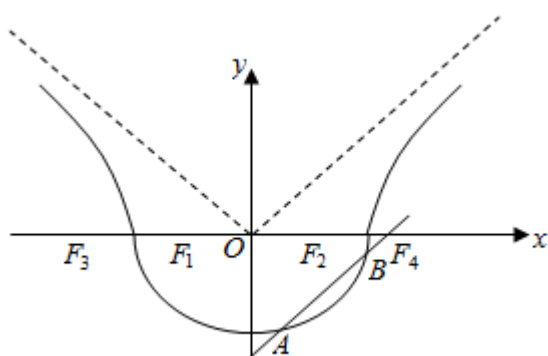
```

S ← 1
I ← 1
While S ≤ 9
    S ← S + I
    I ← I + 2
End While
Print I
    
```

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $a > b > 0$, 如图, 曲线 Γ 由曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (y \leq 0)$ 和曲线 $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (y > 0)$

组成，其中点 F_1, F_2 为曲线 C_1 所在圆锥曲线的焦点，点 F_3, F_4 为曲线 C_2 所在圆锥曲线的焦点。



(I) 若 $F_2(2,0), F_3(-6,0)$ ，求曲线 Γ 的方程；

(II) 如图，作直线 l 平行于曲线 C_2 的渐近线，交曲线 C_1 于点 A, B ，求证：弦 AB 的中点 M 必在曲线 C_2 的另一条渐近线上；

(III) 对于 (I) 中的曲线 Γ ，若直线 l_1 过点 F_4 交曲线 C_1 于点 C, D ，求 $\triangle CDF_1$ 面积的最大值。

18. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 有共同的焦点，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，设 F_1, F_2 分别是

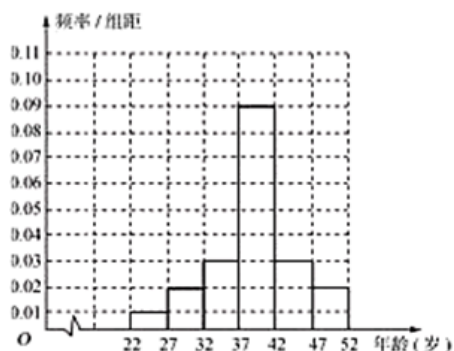
A, B 为椭圆的上下顶点

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过点 $(0, 2)$ 与 x 轴不垂直的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N ，当弦 MN 的中点 P 落在四边形 F_1AF_2B 内 (含边界) 时，求直线 l 的斜率的取值范围。

19. (12 分) 武汉有“九省通衢”之称，也称为“江城”，是国家历史文化名城。其中著名的景点有黄鹤楼、户部巷、东湖风景区等等。

(1) 为了解五·一劳动节当日江城某旅游景点游客年龄的分布情况，从年龄在 22 岁到 52 岁的游客中随机抽取了 1000 人，制成了如图的频率分布直方图：



现从年龄在 $[42, 52]$

内的游客中，采用分层抽样的方法抽取 10 人，再从抽取的 10 人中随机抽取 4 人，记 4 人中年龄在 $[47,52]$ 内的人数为 ξ ，求 $P(\xi=3)$ ；

(2) 为了给游客提供更舒适的旅游体验，该旅游景点游船中心计划在 2020 年劳动节当日投入至少 1 艘至多 3 艘 A 型游船供游客乘坐观光.由 2010 到 2019 这 10 年间的的历史数据资料显示每年劳动节当日客流量 X （单位：万人）都大于 1.将每年劳动节当日客流量数据分成 3 个区间整理得表：

劳动节当日客流量 X	$1 < X < 3$	$3 \leq X \leq 5$	$X > 5$
频数（年）	2	4	4

以这 10 年的数据资料记录的 3 个区间客流量的频率作为每年客流量在该区间段发生的概率，且每年劳动节当日客流量相互独立.

该游船中心希望投入的 A 型游船尽可能被充分利用，但每年劳动节当日 A 型游船最多使用量（单位：艘）要受当日客流量 X （单位：万人）的影响，其关联关系如下表：

劳动节当日客流量 X	$1 < X < 3$	$3 \leq X \leq 5$	$X > 5$
A 型游船最多使用量	1	2	3

若某艘 A 型游船在劳动节当日被投入且被使用，则游船中心当日可获得利润 3 万元；若某艘 A 型游船劳动节当日被投入却不被使用，则游船中心当日亏损 0.5 万元.记 Y （单位：万元）表示该游船中心在劳动节当日获得的总利润， Y 的数学期望越大游船中心在劳动节当日获得的总利润越大，问该游船中心在 2020 年劳动节当日应投入多少艘 A 型游船才能使其当日获得的总利润最大？

20.（12 分）某超市在节日期间进行有奖促销，规定凡在该超市购物满 400 元的顾客，均可获得一次摸奖机会.摸奖规则如下：奖盒中放有除颜色不同外其余完全相同的 4 个球（红、黄、黑、白）.顾客不放回的每次摸出 1 个球，若摸到黑球则摸奖停止，否则就继续摸球.按规定摸到红球奖励 20 元，摸到白球或黄球奖励 10 元，摸到黑球不奖励.

- (1) 求 1 名顾客摸球 2 次摸奖停止的概率；
- (2) 记 X 为 1 名顾客摸奖获得的奖金数额，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

21.（12 分）已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 过点 $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，设椭圆 Γ 的上顶点为 B ，右顶点和右焦点分别为 A ， F ，且 $\angle AFB = \frac{5\pi}{6}$.

(1) 求椭圆 Γ 的标准方程;

(2) 设直线 $l: y = kx + n (n \neq \pm 1)$ 交椭圆 Γ 于 P, Q 两点, 设直线 BP 与直线 BQ 的斜率分别为 k_{BP}, k_{BQ} , 若 $k_{BP} + k_{BQ} = -1$, 试判断直线 l 是否过定点? 若过定点, 求出该定点的坐标; 若不过定点, 请说明理由.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = \frac{-x^2 + ax - 3}{2}$,

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 对任意 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \geq g(x)$ 都有恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 证明: 对一切 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $\ln x > \frac{1}{e^x} - \frac{2}{ex}$ 成立.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

根据题意, 求得 A, M, B 的坐标, 根据点在椭圆上, 点的坐标满足椭圆方程, 即可求得结果.

【详解】

由已知可知, M 点为 AF_1 中点, F_1 为 BM 中点,

故可得 $x_{F_1} + x_A = 2x_M = 0$, 故可得 $x_A = c$;

代入椭圆方程可得 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 不妨取 $y_A = \frac{b^2}{a}$,

故可得 A 点的坐标为 $\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$,

则 $M\left(0, \frac{b^2}{2a}\right)$, 易知 B 点坐标 $\left(-2c, -\frac{b^2}{2a}\right)$,

将 B 点坐标代入椭圆方程得 $a^2 = 5c^2$, 所以离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$,

故选: D.

【点睛】

本题考查椭圆离心率的求解，难点在于根据题意求得 A, B, M 点的坐标，属中档题.

2、B

【解析】

根据可导函数在极值点处的导数值为0，得出 $a_1 a_{4039} = 6$ ，再由等比数列的性质可得.

【详解】

解：依题意 a_1 、 a_{4039} 是函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - 3$ 的极值点，也就是 $f'(x) = x^2 - 8x + 6 = 0$ 的两个根

$$\therefore a_1 a_{4039} = 6$$

又 $\{a_n\}$ 是正项等比数列，所以 $a_{2020} = \sqrt{a_1 \cdot a_{4039}} = \sqrt{6}$

$$\therefore \log_{\sqrt{6}} a_{2020} = \log_{\sqrt{6}} \sqrt{6} = 1.$$

故选：B

【点睛】

本题主要考查了等比数列下标和性质以应用，属于中档题.

3、D

【解析】

由题意画出图形，找出 $\triangle PAB$ 外接圆的圆心及三棱锥 $P-BCD$ 的外接球心 O ，通过求解三角形求出三棱锥 $P-BCD$ 的外接球的半径，则答案可求.

【详解】

如图；设 AB 的中点为 D ；

$$\because PA = \sqrt{2}, PB = \sqrt{14}, AB = 4,$$

$\therefore \triangle PAB$ 为直角三角形，且斜边为 AB ，故其外接圆半径为： $r = \frac{1}{2} AB = AD = 2$ ；

设外接球球心为 O ；

$$\because CA = CB = \sqrt{10}, \text{面 } PAB \perp \text{面 } ABC,$$

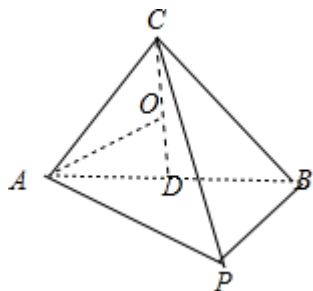
$$\therefore CD \perp AB \text{ 可得 } CD \perp \text{面 } PAB; \text{ 且 } DC = \sqrt{CA^2 - AD^2} = \sqrt{6}.$$

$\therefore O$ 在 CD 上；

$$\text{故有：} AO^2 = OD^2 + AD^2 \Rightarrow R^2 = (\sqrt{6} - R)^2 + r^2 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{6}};$$

∴球 O 的表面积为: $4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{50\pi}{3}$.

故选: D .



【点睛】

本题考查多面体外接球表面积的法, 考查数形结合的解题思想方法, 考查思维能力与计算能力, 属于中档题.

4、C

【解析】

设出等差数列 $\{a_n\}$ 的首项和公差, 即可根据题意列出两个方程, 求出通项公式, 从而求得 a_{10} .

【详解】

设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d , 则

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 7 \\ S_3 = 3a_1 + 3d = 9 \end{cases}, \text{解得 } a_1 = -1, d = 4, \therefore a_n = 4n - 5, \text{ 即有 } a_{10} = 4 \times 10 - 5 = 35.$$

故选: C.

【点睛】

本题主要考查等差数列的通项公式的求法和应用, 涉及等差数列的前 n 项和公式的应用, 属于容易题.

5、B

【解析】

先将三个数通过指数, 对数运算变形 $a = \sqrt[4]{6} = 6^{\frac{1}{4}} > 6^0 = 1$, $b = \log_{\frac{5}{4}} \frac{4}{21} < \log_{\frac{5}{4}} 1 = 0$, $0 < c = \left(\frac{1}{3}\right)^{2.9} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ 再判断.

【详解】

$$\text{因为 } a = \sqrt[4]{6} = 6^{\frac{1}{4}} > 6^0 = 1, \quad b = \log_{\frac{5}{4}} \frac{4}{21} < \log_{\frac{5}{4}} 1 = 0, \quad 0 < c = \left(\frac{1}{3}\right)^{2.9} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1,$$

所以 $a > c > b$,

故选: B.

【点睛】

本题主要考查指数、对数的大小比较，还考查推理论证能力以及化归与转化思想，属于中档题.

6、B

【解析】

由题意得， $z\bar{z} = (1+ai)(1-ai) = 1+a^2$ ，然后求解即可

【详解】

$\because z = 1+ai$ ， $\therefore z\bar{z} = (1+ai)(1-ai) = 1+a^2$. 又 $\because z\bar{z} = 2$ ， $\therefore 1+a^2 = 2$ ， $\therefore a = \pm 1$.

【点睛】

本题考查复数的运算，属于基础题

7、C

【解析】

求得抛物线的焦点坐标，可得双曲线方程 $\frac{y^2}{b} - \frac{x^2}{-a} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{\frac{b}{-a}}x$ ，由题意可得 $b = -4a$ ，又 $c^2 = 1$ ，

即 $b - a = 1$ ，解得 a ， b ，即可得到所求双曲线的方程.

【详解】

解：抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 $(0, 1)$

可得双曲线 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 (b > 0, a < 0)$

即为 $\frac{y^2}{b} - \frac{x^2}{-a} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{\frac{b}{-a}}x$

由题意可得 $\sqrt{\frac{b}{-a}} = 2$ ，即 $b = -4a$

又 $c^2 = 1$ ，即 $b - a = 1$

解得 $a = -\frac{1}{5}$ ， $b = \frac{4}{5}$.

即双曲线的方程为 $\frac{5y^2}{4} - 5x^2 = 1$.

故选：C

【点睛】

本题主要考查了求双曲线的方程，属于中档题.

8、B

【解析】

因为 $z = \frac{1+2i}{2-i} + 1 = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + 1 = \frac{2+i+4i+2i^2}{5} + 1 = 1+i$ ，所以 $\bar{z} = 1-i$ ，故选 B.

9、A

【解析】

根据所给函数解析式满足的等量关系及指数幂运算，可得 $f\left(\frac{m}{n}\right) + f(n) = f(m)$ ；利用定义可证明函数 $f(x)$ 的单调

性，由赋值法即可求得函数 $f(x)$ 在 $[1,16]$ 上的最大值.

【详解】

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，且 $2^{f\left(\frac{m}{n}\right)} \cdot 2^{f(n)} = 4^{\frac{f(m)}{2}}$ ，

则 $f\left(\frac{m}{n}\right) + f(n) = f(m)$ ；

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则 $0 < \frac{x_1}{x_2} < 1$ ，

故 $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) < 0$ ，

令 $m = x_1$ ， $n = x_2$ ，则 $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + f(x_2) = f(x_1)$ ，

即 $f(x_1) - f(x_2) = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) < 0$ ，

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)_{\max} = f(16)$ ，

令 $m = 16$ ， $n = 4$ ，

故 $f(4) + f(4) = f(16) = 4$ ，

故函数 $f(x)$ 在 $[1,16]$ 上的最大值为 4.

故选：A.

【点睛】

本题考查了指数幂的运算及化简，利用定义证明抽象函数的单调性，赋值法在抽象函数求值中的应用，属于中档题.

10、C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/995140242044011332>