

2023-2024 学年安徽省池州市东至第二中学高考数学三模试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知抛物线 $C: y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F ，准线为 l ， P 是 l 上一点，直线 PF 与抛物线交于 A ， B 两点，若

$\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{AF}$ ，则 $|AB|$ 为()

- A. $\frac{40}{9}$ B. 40 C. 16 D. $\frac{16}{3}$

2. 已知复数 z 满足 $z = i(1-i)$ ，(i 为虚数单位)，则 $|z| =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

3. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$ ，且 $\tan \alpha = 2$ ，则 $\cos 2\alpha + \cos \alpha =$ ()

- A. $\frac{2\sqrt{5}-3}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}-3}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}+3}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}+3}{5}$

4. 复数 $\frac{1}{i} + i =$ ()

- A. $-2i$ B. $\frac{1}{2}i$ C. 0 D. $2i$

5. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_n > 0$ ， $q > 1$ ， $a_3 + a_5 = 20$ ， $a_2 a_6 = 64$ ，则 $S_5 =$ ()

- A. 48 B. 36 C. 42 D. 31

6. 已知函数 $f(x) = \ln x + \ln(3-x)$ ，则 ()

- A. 函数 $f(x)$ 在 $(0, 3)$ 上单调递增 B. 函数 $f(x)$ 在 $(0, 3)$ 上单调递减
- C. 函数 $f(x)$ 图像关于 $x = \frac{3}{2}$ 对称 D. 函数 $f(x)$ 图像关于 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 对称

7. 已知 AB 是过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点 F 的弦， O 是原点，则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$ ()

- A. -2 B. -4 C. 3 D. -3

8. 用 1, 2, 3, 4, 5 组成不含重复数字的五位数，要求数字 4 不出现在首位和末位，数字 1, 3, 5 中有且仅有两个数字相邻，则满足条件的不同五位数的个数是 ()

- A. 48 B. 60 C. 72 D. 120

9. 三棱锥 $S-ABC$ 的各个顶点都在球 O 的表面上, 且 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $SA \perp$ 底面 ABC , $SA=4$, $AB=6$, 若点 D 在线段 SA 上, 且 $AD=2SD$, 则过点 D 的平面截球 O 所得截面的最小面积为 ()

- A. 3π B. 4π C. 8π D. 13π

10. 已知双曲线 $M: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 的焦距为 $2c$, 若 M 的渐近线上存在点 T , 使得经过点 T 所作的圆

$(x-c)^2 + y^2 = a^2$ 的两条切线互相垂直, 则双曲线 M 的离心率的取值范围是 ()

- A. $(1, \sqrt{2}]$ B. $(\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ C. $(\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ D. $(\sqrt{3}, \sqrt{5}]$

11. 已知 i 是虚数单位, 若 $\frac{z}{1-i} = 2i+1$, 则 $|z| =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{10}$ D. 10

12. 已知 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{2}{x} - 3$. 若 $x \leq 0$, 则 $f(x) \leq 0$ 的解集是 ()

- A. $[-2, -1]$ B. $(-\infty, -2] \cup [-1, 0]$

- C. $(-\infty, -2] \cup [-1, 0)$ D. $(-\infty, -2) \cup (-1, 0]$

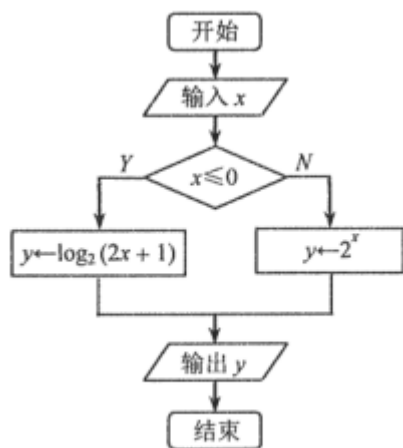
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 某种牛肉干每袋的质量 $m(kg)$ 服从正态分布, 质检部门的检测数据显示: 该正态分布为 $N(2, \sigma^2)$,

$P(1.9, m, 2.1) = 0.98$. 某旅游团游客共购买这种牛肉干 100 袋, 估计其中质量低于 $1.9kg$ 的袋数大约是_____袋.

14. 已知函数 $f(x) = ae^x + x^2 - 8x$ 的图象在 $(0, f(0))$ 处的切线斜率为 -4 , 则 $a =$ _____.

15. 如图是一个算法流程图, 若输出的实数 y 的值为 -1 , 则输入的实数 x 的值为_____.

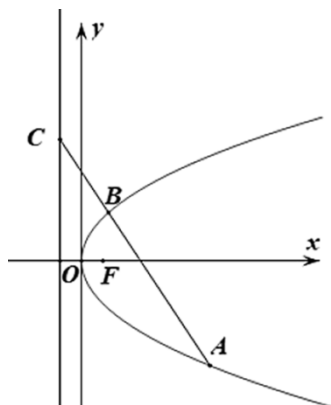


16. 在 $(x+a)^6$ 的展开式中的 x^3 系数为 160, 则 $a =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知抛物线 $G: y^2 = 2px$, 焦点为 F , 直线 l 交抛物线 G 于 A, B 两点, 交抛物线 G 的准线于点 C

，如图所示，当直线 l 经过焦点 F 时，点 F 恰好是 AC 的中点，且 $|BC| = \frac{8}{3}$ 。



(1) 求抛物线 G 的方程；

(2) 点 O 是原点，设直线 OA, OB 的斜率分别是 k_1, k_2 ，当直线 l 的纵截距为 1 时，有数列 $\{a_n\}$ 满足

$a_1 = 1, k = -16a_{n-1}, k_2 = 4(a_n + 2)^2$ ，设数列 $\left\{\frac{a_n}{1+a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知存在正整数 m 使得 $m \leq S_{2020} < m+1$ ，

求 m 的值。

18. (12 分) 设函数 $f(x) = ax - (a+1)\ln(x+1)$ 。

(1) $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $a > 0$ 时，设 $f(x)$ 的最小值为 $g(a)$ ，若 $g(a) < t$ 恒成立，求实数 t 的取值范围。

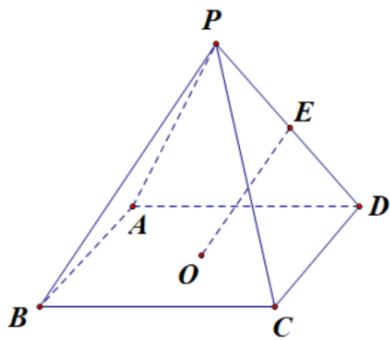
19. (12 分) 若数列 $\{a_n\}$ 满足：对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ， $a_n + |a_{n+1} - a_{n+2}|$ 均为数列 $\{a_n\}$ 中的项，则称数列 $\{a_n\}$ 为“ T 数列”。

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 4n - 2n^2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，试判断数列 $\{a_n\}$ 是否为“ T 数列”？说明理由；

(2) 若公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 为“ T 数列”，求 d 的取值范围；

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 为“ T 数列”， $a_1 = 1$ ，且对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，均有 $a_n < a_{n+1}^2 - a_n^2 < a_{n+1}$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

20. (12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形， O 为其中心， $\triangle PAD$ 为锐角三角形，且平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ， E 为 PD 的中点， $CD \perp DP$ 。



(1) 求证: $OE \perp$ 平面 PAB ;

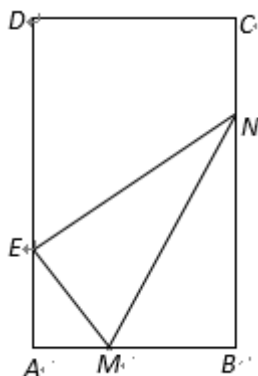
(2) 求证: $CD \perp PA$.

21. (12 分) 在直角坐标系中, 直线 l 过点 $P(1, 2)$, 且倾斜角为 α , $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 以直角坐标系的原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2(3 + \sin^2 \theta) = 12$.

(1) 求直线 l 的参数方程和曲线 C 的直角坐标方程, 并判断曲线 C 是什么曲线;

(2) 设直线 l 与曲线 C 相交于 M, N 两点, 当 $|PM| \cdot |PN| = 2$, 求 α 的值.

22. (10 分) 已知矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB = 6, AD = 12$, 将矩形纸片的右下角沿线段 MN 折叠, 使矩形的顶点 B 落在矩形的边 AD 上, 记该点为 E , 且折痕 MN 的两端点 M, N 分别在边 AB, BC 上. 设 $\angle MNB = \theta, MN = l$, $\triangle EMN$ 的面积为 S .



(1) 将 l 表示成 θ 的函数, 并确定 θ 的取值范围;

(2) 求 l 的最小值及此时 $\sin \theta$ 的值;

(3) 问当 θ 为何值时, $\triangle EMN$ 的面积 S 取得最小值? 并求出这个最小值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

如图所示，过 AB 分别作 $AC \perp l$ 于 C ， $BD \perp l$ 于 D ，利用 $\triangle APC : \triangle BPD$ 和 $\triangle FPM : \triangle BPD$ ，联立方程组计算得到答案.

【详解】

如图所示：过 AB 分别作 $AC \perp l$ 于 C ， $BD \perp l$ 于 D .

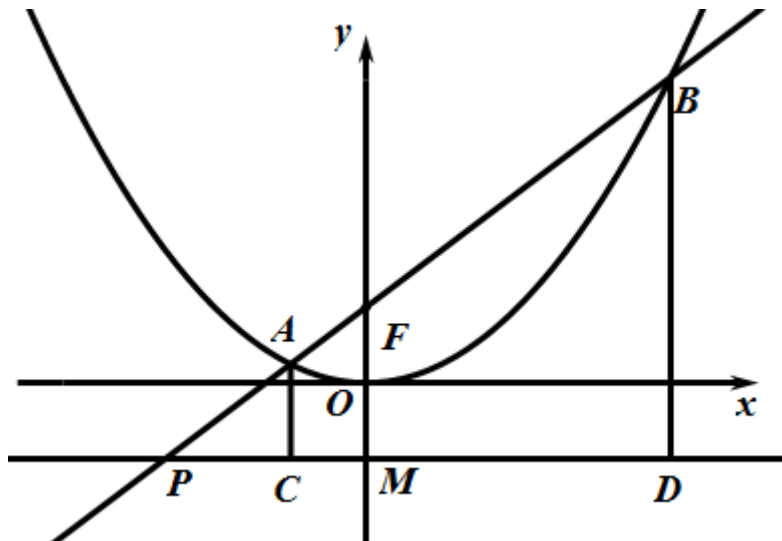
$$\overline{PA} = 2\overline{AF}, \text{ 则 } |AC| = \frac{2}{3}|FM| = \frac{4}{3},$$

$$\text{根据 } \triangle APC : \triangle BPD \text{ 得到: } \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BD}, \text{ 即 } \frac{AP}{AP + \frac{4}{3} + BD} = \frac{\frac{4}{3}}{BD},$$

$$\text{根据 } \triangle FPM : \triangle BPD \text{ 得到: } \frac{AF}{BP} = \frac{FM}{BD}, \text{ 即 } \frac{AP + \frac{4}{3}}{AP + \frac{4}{3} + BD} = \frac{2}{BD},$$

$$\text{解得 } AP = \frac{8}{3}, \quad BD = 4, \text{ 故 } |AB| = |AF| + |BF| = |AC| + |BD| = \frac{16}{3}.$$

故选：D.



【点睛】

本题考查了抛物线中弦长问题，意在考查学生的计算能力和转化能力.

2、A

【解析】

$z = i(1-i) = 1+i$ ，故 $|z| = \sqrt{2}$ ，故选 A.

3、B

【解析】

分析：首先利用同角三角函数关系式，结合题中所给的角的范围，求得 $\cos \alpha$ 的值，之后借助于倍角公式，将待求的式子转化为关于 $\cos \alpha$ 的式子，代入从而求得结果.

详解：根据题中的条件，可得 α 为锐角，

根据 $\tan \alpha = 2$ ，可求得 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

而 $\cos 2\alpha + \cos \alpha = 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} - 1 = \frac{\sqrt{5}-3}{5}$ ，故选 B.

点睛：该题考查的是有关同角三角函数关系式以及倍角公式的应用，在解题的过程中，需要对已知真切求余弦的方法要明确，可以应用同角三角函数关系式求解，也可以结合三角函数的定义式求解.

4、C

【解析】略

5、D

【解析】

试题分析：由于在等比数列 $\{a_n\}$ 中，由 $a_2 a_6 = 64$ 可得： $a_3 a_5 = a_2 a_6 = 64$ ，

又因为 $a_3 + a_5 = 20$ ，

所以有： a_3, a_5 是方程 $x^2 - 20x + 64 = 0$ 的二实根，又 $a_n > 0$ ， $q > 1$ ，所以 $a_3 < a_5$ ，

故解得： $a_3 = 4, a_5 = 16$ ，从而公比 $q = \sqrt{\frac{a_5}{a_3}} = 2, a_1 = 1$ ；

那么 $S_5 = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 31$ ，

故选 D.

考点：等比数列.

6、C

【解析】

依题意可得 $f(3-x) = f(x)$ ，即函数图像关于 $x = \frac{3}{2}$ 对称，再求出函数的导函数，即可判断函数的单调性；

【详解】

解：由 $f(3-x) = \ln(3-x) + \ln[3-(3-x)] = \ln(3-x) + \ln x = f(x)$ ，

$\therefore f(3-x) = f(x)$ ，所以函数图像关于 $x = \frac{3}{2}$ 对称，

又 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3-x} = \frac{2x-3}{x(x-3)}$ ， $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上不单调。

故正确的只有 C，

故选：C

【点睛】

本题考查函数的对称性的判定，利用导数判断函数的单调性，属于基础题。

7、D

【解析】

设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$ ， $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$ ，设 $AB: x = my + 1$ ，联立方程得到 $y_1 y_2 = -4$ ，计算

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2$ 得到答案。

【详解】

设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$ ， $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$ ，故 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2$ 。

易知直线斜率不为 0，设 $AB: x = my + 1$ ，联立方程 $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ ，

得到 $y^2 - 4my - 4 = 0$ ，故 $y_1 y_2 = -4$ ，故 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2 = -3$ 。

故选：D。

【点睛】

本题考查了抛物线中的向量的数量积，设直线为 $x = my + 1$ 可以简化运算，是解题的关键。

8、A

【解析】

对数字 2 分类讨论，结合数字 1,3,5 中有且仅有两个数字相邻，利用分类计数原理，即可得到结论

【详解】

数字 2 出现在第 2 位时，数字 1,3,5 中相邻的数字出现在第 3,4 位或者 4,5 位，

共有 $C_3^2 A_2^2 A_2^2 = 12$ 个

数字 2 出现在第 4 位时，同理也有 12 个

数字 2 出现在第 3 位时，数字 1, 3, 5 中相邻的数字出现在第 1, 2 位或者 4, 5 位，

共有 $C_2^1 C_3^2 A_2^2 A_2^2 = 24$ 个

故满足条件的不同的五位数的个数是 48 个

故选 A

【点睛】

本题主要考查了排列，组合及简单计数问题，解题的关键是对数字 2 分类讨论，属于基础题。

9、A

【解析】

由题意画出图形，求出三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的半径，再求出外接球球心到 D 的距离，利用勾股定理求得过点 D 的平面截球 O 所得截面圆的最小半径，则答案可求。

【详解】

如图，设三角形 ABC 外接圆的圆心为 G ，则外接圆半径 $AG = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ，

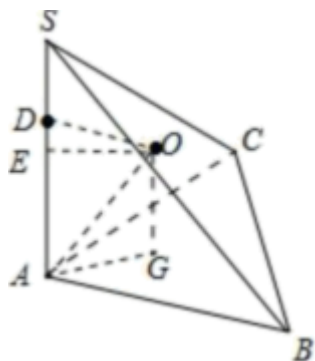
设三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的球心为 O ，则外接球的半径 $R = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

取 SA 中点 E ，由 $SA=4$ ， $AD=3SD$ ，得 $DE=1$ ，

所以 $OD = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{13}$ 。

则过点 D 的平面截球 O 所得截面圆的最小半径为 $\sqrt{4^2 - (\sqrt{13})^2} = \sqrt{3}$

所以过点 D 的平面截球 O 所得截面的最小面积为 $\pi \cdot (\sqrt{3})^2 = 3\pi$



故选：A

【点睛】

本题考查三棱锥的外接球问题，还考查了求截面的最小面积，属于较难题。

10、B

【解析】

由 $b > a$ 可得 $e > \sqrt{2}$ ；由过点 T 所作的圆的两条切线互相垂直可得 $|TF| = \sqrt{2}a$ ，又焦点 $F(c, 0)$ 到双曲线渐近线的距离为 b ，则 $|TF| = \sqrt{2}a \geq b$ ，进而求解。

【详解】

$$\text{Q } b > a, \text{ 所以离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} > \sqrt{2},$$

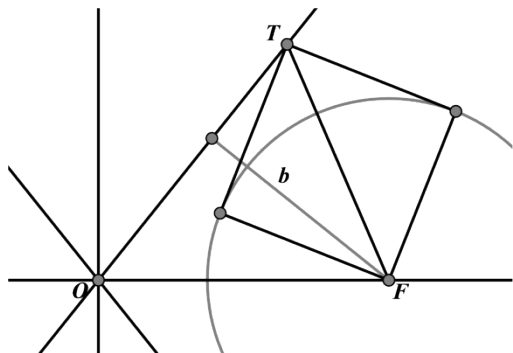
又圆 $(x-c)^2 + y^2 = a^2$ 是以 $F(c, 0)$ 为圆心，半径 $r = a$ 的圆，要使得经过点 T 所作的圆的两条切线互相垂直，必有

$$|TF| = \sqrt{2}a,$$

而焦点 $F(c, 0)$ 到双曲线渐近线的距离为 b ，所以 $|TF| = \sqrt{2}a \geq b$ ，即 $\frac{b}{a} \leq \sqrt{2}$ ，

所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \leq \sqrt{3}$ ，所以双曲线 M 的离心率的取值范围是 $(\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ 。

故选：B



【点睛】

本题考查双曲线的离心率的范围，考查双曲线的性质的应用。

11、C

【解析】

根据复数模的性质计算即可。

【详解】

$$\text{因为 } \frac{z}{1-i} = 2i+1,$$

$$\text{所以 } z = (1-i)(2i+1),$$

$$|z| = |1-i| \cdot |2i+1| = \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10},$$

故选：C

【点睛】

本题主要考查了复数模的定义及复数模的性质，属于容易题.

12、B

【解析】

利用函数奇偶性可求得 $f(x)$ 在 $x < 0$ 时的解析式和 $f(0)$ ，进而构造出不等式求得结果.

【详解】

Q $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数， $\therefore f(0) = 0$.

当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ， $\therefore f(-x) = -x - \frac{2}{x} - 3$ ，

Q $f(x)$ 为奇函数， $\therefore f(x) = -f(-x) = x + \frac{2}{x} + 3 (x < 0)$ ，

$$\text{由} \begin{cases} x < 0 \\ x + \frac{2}{x} + 3 \leq 0 \end{cases} \text{得：} x \leq -2 \text{ 或 } -1 \leq x < 0;$$

综上所述：若 $x \leq 0$ ，则 $f(x) \leq 0$ 的解集为 $(-\infty, -2] \cup [-1, 0]$.

故选：B.

【点睛】

本题考查函数奇偶性的应用，涉及到利用函数奇偶性求解对称区间的解析式；易错点是忽略奇函数在 $x = 0$ 处有意义时， $f(0) = 0$ 的情况.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、1

【解析】

根据正态分布对称性，求得质量低于 1.9kg 的袋数的估计值.

【详解】

由于 $\mu = 2$ ，所以 $P(m < 1.9) = \frac{1 - 0.98}{2} = 0.01$ ，所以 100 袋牛肉干中，质量低于 1.9kg 的袋数大约是 $100 \times 0.01 = 1$ 袋.

故答案为：1

【点睛】

本小题主要考查正态分布对称性的应用，属于基础题.

14、4

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/995221223340011140>