

微专题 01 集合 5 种常考题型总结(133 题)

高频考点

题型一 集合的含义与表示

- (一) 判断对象是否能构成集合
- (二) 判断元素与集合的关系
- (三) 根据元素与集合的关系求参数
- (四) 判断集合中的元素个数
- (五) 根据集合中元素的个数求参数
- (六) 集合元素互异性的应用
- (七) 集合的表示

题型二 集合间的基本关系

- (一) 集合间基本关系的判定
- (二) 空集及其应用
- (三) (真)子集的列举与个数的计算

- (四) 根据子集、真子集的个数求参数

- (五) 集合相等及其应用

- (1) 判断两个集合是否相等
- (2) 根据两个集合相等求参数
- (六) 根据集合的包含关系求参数

题型三 集合的基本运算

- (一) 集合的并集、交集运算
- (二) 补集的运算
- (三) 交、并、补的综合运算
- (四) 根据集合的运算结果求参数

题型四 韦恩图及其应用

题型五 集合的新定义问题

解题策略

1. 集合的概念

- (1) 集合中元素的三个特征：确定性、互异性、无序性.
- (2) 元素与集合的关系是属于或不属于两种，用符号 $\in$ 或 $\notin$ 表示.
- (3) 集合的表示法：列举法、描述法、图示法.
- (4) 常见数集的记法

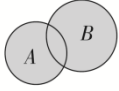
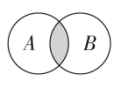
集合	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	N	N[*](或 N₊)	Z	Q	R

2. 集合间的基本关系

表示 关系	文字语言	符号语言
相等	构成两个集合的元素是一样的	$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$
子集	集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中	$A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$

	的元素	
真子集	集合 A 是集合 B 的子集, 但存在元素 $x \in B$, 且 $x \notin A$	$A \subsetneq B$
结论	任何一个集合是它本身的子集	$A \subseteq A$
	若 A 是 B 的子集, B 是 C 的子集, 则 A 是 C 的子集	$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
	空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集	$\emptyset \subseteq A$ $\emptyset \subsetneq B (B \neq \emptyset)$

3. 集合的基本运算

	并集	交集	补集
图形			
符号	$A \cup B = \{x x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$	$A \cap B = \{x x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$	$C_U A = \{x x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}$

4. 集合的运算性质

(1) 并集的性质: $(A \cup B) \supseteq A$; $(A \cup B) \supseteq B$; $A \cup A = A$; $A \cup \emptyset = A$; $A \cup B = B \cup A$.

(2) 交集的性质: $(A \cap B) \subseteq A$; $(A \cap B) \subseteq B$; $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap B = B \cap A$.

(3) 补集的性质: $C_U(C_U A) = A$; $C_U U = \emptyset$; $C_U \emptyset = U$; $A \cap (C_U A) = \emptyset$; $A \cup (C_U A) = U$.

5. 交集与并集的转化

$$(C_U A) \cap (C_U B) = C_U(A \cup B), (C_U A) \cup (C_U B) = C_U(A \cap B).$$

6. 子集个数

若有限集 A 中有 n 个元素, 则集合 A 的子集个数为 2^n , 真子集的个数为 $2^n - 1$, 非空真子集的个数为 $2^n - 2$.

7. 元素个数

用 $\text{card}(A)$ 表示有限集合 A 中元素的个数. 对任意两个有限集合 A, B , 有 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

8. 理解集合的含义的两个关注点

(1) 明确构成集合的元素是什么, 即弄清该集合是数集、点集, 还是其他集合.

(2) 看集合的构成元素满足的限制条件是什么.

注意: 利用集合元素的限制条件或元素与集合的关系求参数的值或确定集合中元素的个数时, 要注意检验集合是否满足元素的互异性.

9. 与集合中元素有关的问题的求解策略

(1) 用描述法表示集合, 首先要搞清楚集合中代表元素的含义, 再看元素的限制条件, 明白集合的类型,

是数集、点集还是其他类型的集合，要明了集合 $\{x|y=f(x)\}$ ， $\{y|y=f(x)\}$ ， $\{(x, y)|y=f(x)\}$ 三者是不同的。

(2)集合元素的三个特性中的互异性对解题的影响较大，特别是含有字母的集合，在求出字母的值后，要注意检验集合中的元素是否满足互异性。

10.集合间基本关系的 2 种判定方法和 1 个关键

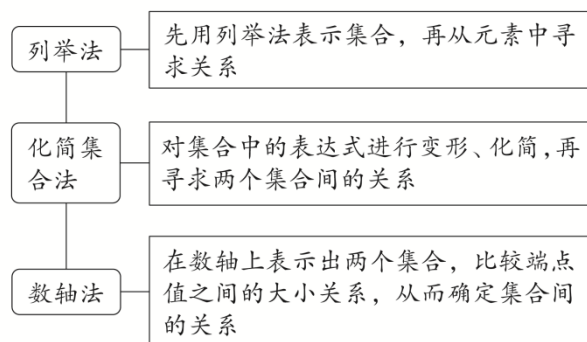
两种方法：

(1)化简集合，从表达式中寻找两集合的关系；

(2)用列举法(图示法)表示各集合，从元素(图形)中寻找关系

一个关键：

关键是看它们是否具有包含关系，若有包含关系就是子集关系



11.根据两集合的关系求参数的方法

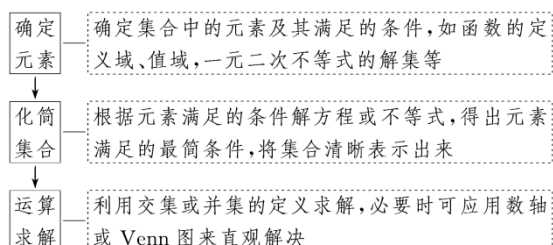
已知两个集合之间的关系求参数时，要明确集合中的元素，对子集是否为空集进行分类讨论（必须优先考虑空集的情况），做到不漏解，其次是将条件转化为元素或区间端点间的关系，进而转化为参数所满足的关系，常用数轴、Venn 图等来直观解决这类问题。

(1)若集合元素是一一列举的，依据集合间的关系，转化为解方程(组)求解，此时应注意集合中元素的互异性；

(2)若集合表示的是不等式的解集，常依据数轴转化为不等式(组)求解，此时需注意端点值能否取到。

提醒：题目中若有条件 $B \subseteq A$ ，则应分 $B = \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 两种情况进行讨论

12.集合基本运算的方法技巧



13.集合基本运算的求解策略

(1)当集合是用列举法表示的数集时，可以通过列举集合的元素进行运算，也可借助 Venn 图运算。

(2)当集合是用不等式表示时，可运用数轴求解。对于端点处的取舍，可以单独检验。

(3)解决抽象集合(没有给出具体元素的集合)间的关系判断和运算的问题的途径有两条：一是利用特殊值

法将抽象集合具体化；二是利用图形化抽象为直观.

14.数形结合常使集合间的运算更简捷、直观

对离散的数集间的运算或抽象集合间的运算,可借助韦恩(Venn)图实施;对连续的数集间的运算,常利用数轴进行;对点集间的运算,则往往通过坐标平面内的图形求解.这些在本质上都是数形结合思想的体现和运用.

15.集合运算中参数问题的求解策略

集合运算中的求参数问题,首先要会化简集合,因为在高考中此类问题常与不等式等知识综合考查,以体现综合性,其次注意数形结合(包括用数轴、韦恩(Venn)图等)及端点值的取舍.

具体步骤如下:

- (1)将集合中的运算关系转化为两个集合之间的关系.若集合中的元素能一一列举,则用观察法得到不同集合中元素之间的关系;若集合是与不等式有关的集合,则一般利用数轴解决,要注意端点值能否取到.
- (2)将集合之间的关系转化为解方程(组)或不等式(组)问题求解.
- (3)根据求解结果来确定参数的值或取值范围.

16.韦恩图的应用

韦恩(Venn)图能更直观地表示集合之间的关系,先分析集合关系,化简集合,再由韦恩(Venn)图所表示的集合关系进行运算.对复杂的集合关系问题,或相关的数学应用问题,可通过构造韦恩(Venn)图进行求解.

17.集合新定义问题的求解思路

解决以集合为背景的新定义问题要抓住的两点

- (1)紧扣新定义.首先分析新定义的特点,把新定义所叙述的问题的本质弄清楚,并能够应用到具体的解题过程之中,这是破解新定义型集合问题难点的关键所在.
- (2)用好集合的性质.解题时要善于从试题中发现可以使用集合性质的一些因素,在关键之处用好集合的运算与性质.



考点精析

题型一 集合的含义与表示

(一)判断对象能够构成集合

1. 【多选】(2024·福建泉州·高一校考阶段练习)下列各组对象能构成集合的是()

A. 全体较高的学生

B. 所有素数

C. 2023 年高考数学难题

D. 所有正方形

【答案】BD

【分析】AC 不满足集合的确定性，BD 满足集合的确定性.

【详解】A 选项中“比较高”标准不明确，不符合确定性，不能构成集合，A 错误；

B 选项，所有素数满足确定性，能构成集合，B 正确；

C 选项，“难题”的标准不明确，不符合确定性，不能构成集合，C 错误；

D 选项，所有正方形满足确定性，能构成集合，D 正确

故选：BD

2. (2024·高一课时练习) 下列各组对象的全体能构成集合的有 ()

(1) 正方形的全体；(2) 高一数学书中所有的难题；(3) 平方后等于负数的数；(4) 某校高一年级学生身高在 1.7 米的学生；(5) 平面内到线段 AB 两端点距离相等的点的全体.

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

【答案】C

【分析】根据集合中元素的确定性判断可得答案.

【详解】(1) (3) (4) (5) 中的对象是确定的，可以组成集合，(2) 中的对象是不确定的，不能组成集合.

故选：C.

3. (2024·上海浦东新·高一统考期末) 请将下列各组对象能组成集合的序号填在后面的横线上_____.

①上海市 2023 年入学的全体高一年级新生；

②在平面直角坐标系中，到定点 $(0,0)$ 的距离等于 1 的所有点；

③影响力比较大的中国数学家；

④不等式 $3x - 10 < 0$ 的所有正整数解.

【答案】①②④

【分析】根据集合的概念即可判断.

【详解】解：对于①，“上海市 2023 年入学的全体高一年级新生”，研究对象是明确的，符合集合的定义，能构成集合；

对于②，“在平面直角坐标系中，到定点 $(0,0)$ 的距离等于 1 的所有点”，研究对象是明确的，符合集合的定义，能构成集合；

对于③，“影响力比较大的中国数学家”，其中影响力比较大的没有明确的定义，故不能构成集合；

π 是无限不循环小数, 属于无理数, ⑤错误;

$\mathbb{Z}$ 表示所有整数的集合, -3 是整数, $\therefore -3 \in \mathbb{Z}$, ⑥正确;

故答案为: 3.

7. (2024·高一课时练习) 下面有四个结论: ①集合 $\mathbb{N}$ 中最小数为 1; ②若 $-a \notin \mathbb{N}$, 则 $a \in \mathbb{N}$; ③若 $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, 则 $a+b$ 的最小值为 2; ④所有的正数组成一个集合. 其中正确结论的个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】B

【分析】直接由元素与集合的关系逐一判断即可.

【详解】①集合 $\mathbb{N}$ 中最小数为 0, 故①错误;

②取 $-1.5 \notin \mathbb{N}$, 则 $1.5 \notin \mathbb{N}$, 故②错误;

③若 $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, 则 $a+b$ 的最小值为 2, 错误, 当 $a=b=0$ 时, $a+b=0$, 故③错误;

④所有的正数组成一个集合, 故④正确;

故选: B.

8. (2024·黑龙江齐齐哈尔·高一校考期中) 若集合 $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq \sqrt{2021}\}$, $a = 2\sqrt{2}$, 则 ()

- A. $a \in P$ B. $\{a\} \in P$ C. $\{a\} \subseteq P$ D. $a \notin P$

【答案】D

【分析】根据集合 P , 判断元素 a 是否在集合 P 内即可选出结果.

【详解】解: 因为 $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq \sqrt{2021}\}$, $a = 2\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$,

所以 $a \notin P$.

故选: D

9. (2024·贵州黔东南·凯里一中校考三模) 已知集合 $S = \{y \mid y = x^2 - 1\}$, $T = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$, 下列关系正确的是 ()

- A. $-2 \in S$ B. $(2, -2) \notin T$ C. $-1 \notin S$ D. $(-1, 1) \in T$

【答案】D

【分析】根据元素与集合的关系求解.

【详解】因为 $S = \{y \mid y = x^2 - 1\} = \{y \mid y \geq -1\}$,

所以 A、C 错误,

因为 $2+(-2)=0$ ，所以 $(2,-2)\in T$ ，所以 B 错误，

又 $-1+1=0$ ，所以 $(-1,1)\in T$ ，所以 D 正确，

故选:D.

(三) 根据元素与集合的关系求参数

10. (2024·江苏·高一假期作业) 已知集合 A 含有两个元素 a 和 a^2 ，若 $2\in A$ ，则实数 a 的值为_____.

【答案】2 或 $\pm\sqrt{2}$

【分析】根据元素与集合间的关系即可求解.

【详解】因为 $2\in A$ ，所以 $a=2$ 或 $a^2=2$ ，即 $a=2$ 或 $a=\pm\sqrt{2}$.

故答案为: 2 或 $\pm\sqrt{2}$

11. (2024·高一课时练习) 已知集合 A 含有两个元素 $a-3$ 和 $2a-1$ ，若 $-3\in A$ ，求实数 a 的值.

【答案】0 或 -1

【分析】分 $a-3=-3$ 与 $2a-1=-3$ 两种情况，进行求解，检验后得到答案.

【详解】若 $a-3=-3$ ，则 $a=0$ ，此时 $2a-1=-1$ ，满足要求，

若 $2a-1=-3$ ，解得 $a=-1$ ，此时 $a-3=-4$ ，满足要求，

综上: $a=0$ 或 -1

12. (2024·高一课时练习) 已知集合 A 的所有元素为 2, 4, 6，若 $a\in A$ ，且有 $6-a\in A$ ，则 a 的值是_____.

【答案】2 或 4

【分析】对 $a=2, 4, 6$ ，分类讨论即可.

【详解】若 $a=2$ ，则 $6-a=4\in A$ ，符合题意；

若 $a=4$ ，则 $6-a=2\in A$ ，符合题意；

若 $a=6$ ，则 $6-a=0\notin A$ ，不符合题意.

故答案为: 2 或 4.

13. (2024·山东日照·高一校考阶段练习) 已知集合 $A=\{x|x^2+2ax-a<0\}$ ，且 $-1\notin A$ ，求实数 a 的取值范围.

【答案】 $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$

【分析】首先根据题意得到 $-1\in \complement_{\mathbb{R}} A$ ，即 $1-2a-a\geq 0$ 恒成立，即可得到答案.

【详解】因为 $A = \{x \mid x^2 + 2ax - a < 0\}$, $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x \mid x^2 + 2ax - a \geq 0\}$, $-1 \notin A$,

所以 $-1 \in \complement_{\mathbb{R}} A$, 即 $x = -1$ 满足 $x^2 + 2ax - a \geq 0$.

即 $1 - 2a - a \geq 0$ 恒成立, 即 $a \leq \frac{1}{3}$.

故答案为: $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$

14. (2024·高一单元测试) 已知集合 $A = \{2, 0, 1, 9\}$, $B = \{k \mid k \in \mathbb{R}, k^2 - 2 \in A, k - 2 \notin A\}$, 则集合 B 中所有的元素之和为 ()

A. 0

B. 2

C. -1

D. -2

【答案】D

【分析】根据集合的定义求出集合 B 后可得结论.

【详解】 $A = \{2, 0, 1, 9\}$, $B = \{k \mid k \in \mathbb{R}, k^2 - 2 \in A, k - 2 \notin A\}$,

①当 $k^2 - 2 = 2$ 时, $k = \pm 2$,

$k = 2$ 时, $k - 2 = 0 \in A$, $\therefore k \neq 2$;

$k = -2$ 时, $k - 2 = -4 \notin A$, 满足条件;

②当 $k^2 - 2 = 0$ 时, $k = \pm\sqrt{2}$, $k - 2 = \pm\sqrt{2} - 2 \notin A$, 满足条件;

③当 $k^2 - 2 = 1$ 时, $k = \pm\sqrt{3}$, $k - 2 = \pm\sqrt{3} - 2 \notin A$, 满足条件;

④当 $k^2 - 2 = 9$ 时, $k = \pm\sqrt{11}$, $k - 2 = \pm\sqrt{11} - 2 \notin A$, 满足条件.

从而得到 $B = \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{11}, \pm\sqrt{3}, -2\}$,

所以集合 B 中所有元素之和为 -2.

故选: D.

15. (2023 秋·四川泸州·高一统考期末) 已知 $(1, 2) \in \{(x, y) \mid 2x + ay - 3 = 0\}$, 则 a 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ / 0.5

【分析】根据元素与集合的关系, 把点坐标代入直线方程运算即可求得 a 的值.

【详解】因为 $(1, 2) \in \{(x, y) \mid 2x + ay - 3 = 0\}$, 所以 $2 + 2a - 3 = 0$, 解得: $a = \frac{1}{2}$,

故答案为: $\frac{1}{2}$.

16. (2024·上海杨浦·复旦附中校考模拟预测) 已知集合 $A = \{x, x^2 + 1, -1\}$ 中的最大元素为 2, 则实数 $x =$

_____.

【答案】1

【分析】依题意可得 $x^2+1=2$ ，解得 x ，再检验即可.

【详解】因为 $x^2+1-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ ，所以 $x^2+1>x$ ，

所以 $x^2+1=2$ ，解得 $x=1$ 或 $x=-1$ ，

显然 $x=-1$ 不满足集合元素的互异性，故舍去，经检验 $x=1$ 符合题意.

故答案为：1

（四）判断集合中元素的个数

17. (2024·高一课时练习) 由 $a, -a, |a|, \sqrt{a^2}$ 构成的集合中，元素个数最多是_____.

【答案】2

【分析】分 $a=0$ 与 $a\neq 0$ 讨论即可求解.

【详解】当 $a=0$ 时， $a=-a=|a|=\sqrt{a^2}=0$ ，此时元素个数为 1；

当 $a\neq 0$ 时， $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, a>0 \\ -a, a<0 \end{cases}$ ，

所以一定与 a 或 $-a$ 中的一个一致，此时元素个数为 2.

所以由 $a, -a, |a|, \sqrt{a^2}$ 构成的集合中，元素个数最多是 2 个.

故答案为:2.

18. (2023 秋·高一单元测试) 已知集合 $A=\{0,1,2\}$, $B=\{(x,y)|x\in A,y\in A,x-y\in A\}$ ，则集合 B 中有_____个元素.

【答案】6

【分析】由题意分类讨论 x 的取值，确定 y 的值，即可求得答案.

【详解】因为 $x-y\in A$ ，所以 $x\geq y$.

当 $x=0$ 时， $y=0$ ；

当 $x=1$ 时， $y=0$ 或 $y=1$ ；

当 $x=2$ 时， $y=0,1,2$.

故集合 $B=\{(0,0),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(2,2)\}$ ，即集合 B 中有 6 个元素，

故答案为：6

19. (2024·全国·高三专题练习) 已知集合 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$, $B=\{(x,y)|x\in A,y\in A,x-y\in A\}$ ，则集合 B 中含元素个数为 ()

A. 20

B. 21

C. 22

D. 23

【答案】B

【分析】根据 $x-y$ 的值分类讨论，即可求出集合 B 中所含元素个数.

【详解】当 $x-y=0$ 时，有 $(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)$ ，6个元素；

当 $x-y=1$ 时，有 $(1,0),(2,1),(3,2),(4,3),(5,4)$ ，5个元素；

当 $x-y=2$ 时，有 $(2,0),(3,1),(4,2),(5,3)$ ，4个元素；

当 $x-y=3$ 时，有 $(3,0),(4,1),(5,2)$ ，3个元素；

当 $x-y=4$ 时，有 $(4,0),(5,1)$ ，2个元素；

当 $x-y=5$ 时，有 $(5,0)$ ，1个元素，

综上，一共有21个元素.

故选：B.

20. (2023 秋·高一课时练习) 已知集合 A 的元素满足条件:若 $a \in A$, 则 $\frac{1+a}{1-a} \in A (a \neq 1)$, 当 $\frac{1}{3} \in A$ 时, 则集合 A 中元素的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】D

【分析】列举出满足集合描述的元素，即可得答案.

【详解】 $\because \frac{1}{3} \in A, \therefore \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2 \in A. \because 2 \in A, \therefore \frac{1+2}{1-2} = -3 \in A. \because -3 \in A, \therefore \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2} \in A.$

$\because -\frac{1}{2} \in A, \therefore \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \in A. \therefore$ 集合 A 中有 $-3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2$ 四个元素.

故选：D

21. (2024 · 高一课时练习) 若集合 $M = \{0, 1, 2\}, N = \{(x, y) | x, y \in M\}$, 则 N 中元素的个数为 ()

A. 3

B. 6

C. 9

D. 10

【答案】C

【分析】根据集合中元素的特征即可列举求解.

【详解】由 $M = \{0, 1, 2\}, N = \{(x, y) | x, y \in M\}$ 可知集合

$N = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$, 故共有9个元素,

故选：C

22. (2024·高一单元测试) 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{(x, y) | x \in A, y \in A, x - y \in A\}$, 则集合 B 中有_____个元素.

【答案】6

【分析】由题意分类讨论 x 的取值, 确定 y 的值, 即可求得答案.

【详解】因为 $x - y \in A$, 所以 $x \geq y$.

当 $x=0$ 时, $y=0$;

当 $x=1$ 时, $y=0$ 或 $y=1$;

当 $x=2$ 时, $y=0, 1, 2$.

故集合 $B = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$, 即集合 B 中有 6 个元素,

故答案为: 6

23. (2024·河南濮阳·高一校考阶段练习) 集合 $A = \{(x, y) | x + y = 10, x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*\}$ 的元素个数为 ()

A. 8

B. 9

C. 10

D. 100

【答案】B

【分析】由题意利用列举法写出集合 A 中的元素即可得出答案.

【详解】集合 $A = \{(x, y) | x + y = 10, x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*\} = \{(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)\}$,

所以集合 A 的元素个数为 9 个.

故选: B.

24. (2024·上海宝山·高一上海交大附中校考阶段练习) 集合 $\left\{y \mid y = \frac{6}{x+2}, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\right\}$ 中的元素个数为_____个.

【答案】8

【分析】根据元素 x, y 为整数求得正确答案.

【详解】由于 $x \in \mathbb{Z}, y = \frac{6}{x+2} \in \mathbb{Z}$,

所以 $x+2 \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$,

则 $\left\{y \mid y = \frac{6}{x+2}, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\right\} = \{-1, -2, -3, -6, 6, 3, 2, 1\}$, 共 8 个元素.

故答案为: 8

25. (2024·高一课时练习) 集合 A 中的元素是实数, 且满足条件①若 $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$, ② $2 \in A$, 求:

(1) A 中至少有几个元素?

(2) 若条件②换成 $3 \in A$, A 中至少含有的元素是什么?

(3) 请你设计一个属于 A 的元素, 求出 A 中至少含有的其他元素.

【答案】(1) 3;

(2) $3, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$;

(3) 令 $4 \in A$, A 中至少含有的其他元素是 $-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}$. (答案不唯一)

【分析】(1) 按照给定条件, 把 2 代入依次计算作答.

(2) 按照给定条件, 把 3 代入依次计算, 确定集合 A 中含有的元素作答.

(3) 令集合 A 中元素为 4, 再代入依次计算确定其它元素作答.

【详解】(1) 因为 $2 \in A$, 由①知, $\frac{1}{1-2} = -1 \in A$, 而 $-1 \in A$, 则 $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$, 而 $\frac{1}{2} \in A$, 则

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \in A,$$

所以集合 A 中至少有 3 个元素.

(2) 因为 $3 \in A$, 由①知, $\frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2} \in A$, 而 $-\frac{1}{2} \in A$, 则 $\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3} \in A$, 而 $\frac{2}{3} \in A$, 则 $\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3 \in A$,

所以集合 A 中至少含有的元素是 $3, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$.

(3) 令 $4 \in A$, 由①知, $\frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3} \in A$, 而 $-\frac{1}{3} \in A$, 则 $\frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{3}{4} \in A$, 而 $\frac{3}{4} \in A$, 则 $\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4 \in A$,

所以集合 A 中至少含有的其它元素是 $-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}$.

(五) 根据集合中元素的个数求参数

26. (2024·河南新乡·高一校考阶段练习) 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0\}$, 若集合 A 为单元素集, 则 a 的取值为 ()

A. 1

B. -1

C. 0 或 1

D. -1 或 0 或 1

【答案】C

【分析】根据集合 A 为单元素集, 可得方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 只有一个实根, 对 a 分类讨论即可求解.

【详解】若集合 A 为单元素集, 则方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 只有一个实根.

当 $a=0$, 可得 $x=-\frac{1}{2}$, 满足题意;

当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 4 - 4a = 0$, 解得 $a=1$.

故 a 的取值是 0 或 1.

故选: C.

27. (2024·高一课时练习) 若 $\{b\} = \{x | ax^2 - 4x + 1 = 0\} (a, b \in \mathbb{R})$, 则 $a+b$ 等于 ()

A. $\frac{9}{2}$

B. $\frac{9}{2}$ 或 $\frac{1}{4}$

C. $\frac{8}{5}$

D. $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{1}{4}$

【答案】 B

【分析】 由题意可知 $ax^2 - 4x + 1 = 0$ 只有一个实数根, 讨论 $a=0$ 和 $a \neq 0$, 由根的判别式可得答案.

【详解】 $\because \{b\} = \{x | ax^2 - 4x + 1 = 0\} (a, b \in \mathbb{R})$, $\therefore ax^2 - 4x + 1 = 0$ 只有一个实数根.

当 $a=0$ 时, $\{b\} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$, 此时 $a+b = \frac{1}{4}$;

当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 16 - 4a = 0$, 所以 $a=4$, 此时 $b = \frac{1}{4}$.

$\therefore a+b = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ 或 $a+b = \frac{1}{4}$.

故选: B.

28. (2024·四川·高一校考阶段练习) 设集合 $A = \{x | x^2 + 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + (m+1)x + m = 0\}$.

(1) 若 B 中有且只有一个元素, 求实数 m 的值;

(2) 若 $B \subseteq A$ 求实数 m 的值.

【答案】 (1) 1

(2) $m=1$ 或 $m=2$

【分析】 (1) 解法一: 利用十字相乘法解方程, 由题意, 可得答案; 解法二: 根据二次方程根的判别式, 结合题意, 建立方程, 可得答案;

(2) 求得两个方程的根, 利用集合之间的关系, 根据分类讨论的思想, 可得答案.

【详解】 (1) 解法一: 因为 $x^2 + (m+1)x + m = 0$, 整理可得 $(x+1)(x+m) = 0$, 解得 $x=-1$ 或 $x=-m$, 又 B 中只有一个元素, 故 $m=1$.

解法二: B 中有且只有一个元素, 所以方程 $x^2 + (m+1)x + m = 0$ 有唯一实根, 从而

$\Delta = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2 = 0$, 所以 $m=1$.

(2) 由 $x^2 + 3x + 2 = 0$, 解得 $x=-1$ 或 $x=-2$,

由 $x^2 + (m+1)x + m = 0$ ，整理可得 $(x+1)(x+m) = 0$ ，解得 $x = -1$ 或 $x = -m$ ，

$B \subseteq A$ ，当 $m = 1$ 时， $B = \{-1\}$ ，满足 $B \subseteq A$ ，

当 $m = 2$ 时， $B = \{-1, -2\}$ 同样满足 $B \subseteq A$ ，故 $m = 1$ 或 $m = 2$ 。

29. (2024·广东广州·高一广州市第九十七中学校考期末) 已知全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | x^2 + px + 12 = 0\}$ ，

集合 $B = \{x | x^2 - 5x + q = 0\}$ 。

(1) 若集合 A 中有 2 个元素，求 p 的取值范围；

(2) 若 $A \cap B = \{2\}$ ，求 $A \cup B$ 。

【答案】(1) $p < -4\sqrt{3}$ 或 $p > 4\sqrt{3}$

(2) $\{2, 3, 6\}$

【分析】(1) 根据判别式列不等式，从而求得 p 的取值范围。

(2) 先求得 p, q ，由此求得 A, B ，进而求得 $A \cup B$ 。

【详解】(1) 若集合 A 中有 2 个元素，

所以 $\Delta = p^2 - 4 \times 12 = p^2 - 48 > 0$ ，

解得 $p < -4\sqrt{3}$ 或 $p > 4\sqrt{3}$ 。

(2) 由于 $A \cap B = \{2\}$ ，

所以 $\begin{cases} 4 + 2p + 12 = 0 \\ 4 - 10 + q = 0 \end{cases}$ ，解得 $p = -8, q = 6$ 。

由 $x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6) = 0$ 解得 $x = 2$ 或 $x = 6$ ，所以 $A = \{2, 6\}$ 。

由 $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0$ 解得 $x = 2$ 或 $x = 3$ ，所以 $B = \{2, 3\}$ 。

所以 $A \cup B = \{2, 3, 6\}$ 。

30. (2024·高一单元测试) 已知集合 $A = \{x | ax^2 - 3x + 2 = 0, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}\}$ 。

(1) 若 A 是空集，求 a 的取值范围；

(2) 若 A 中只有一个元素，求 a 的值，并求集合 A ；

(3) 若 A 中至多有一个元素，求 a 的取值范围

【答案】(1) $\left(\frac{9}{8}, +\infty\right)$

(2) a 的值为 0 或 $\frac{9}{8}$, 当 $a=0$ 时 $A=\left\{\frac{2}{3}\right\}$, 当 $a=\frac{9}{8}$ 时 $A=\left\{\frac{4}{3}\right\}$

(3) $\{0\} \cup \left[\frac{9}{8}, +\infty\right)$

【分析】(1) A 是空集, 则方程为二次方程, 且方程无实根;

(2) A 中只有一个元素, 则方程为一次方程, 或方程为二次方程且方程有两个相同的根;

(3) A 中至多有一个元素, 则方程为一次方程, 或方程为二次方程且至多一个实根.

【详解】(1) A 是空集, $\therefore a \neq 0$ 且 $\Delta < 0$, $\therefore 9-8a < 0$, 解得 $a > \frac{9}{8}$,

$\therefore a$ 的取值范围为: $\left(\frac{9}{8}, +\infty\right)$;

(2) 当 $a=0$ 时, 集合 $A=\{x \mid -3x+2=0\}=\left\{\frac{2}{3}\right\}$,

当 $a \neq 0$ 时, $\Delta=0$, $\therefore 9-8a=0$, 解得 $a=\frac{9}{8}$, 此时集合 $A=\left\{\frac{4}{3}\right\}$,

综上所述, a 的值为 0 或 $\frac{9}{8}$, 当 $a=0$ 时, 集合 $A=\left\{\frac{2}{3}\right\}$, 当 $a=\frac{9}{8}$ 时, 集合 $A=\left\{\frac{4}{3}\right\}$;

(3) 由 (1), (2) 可知, 当 A 中至多有一个元素时, $a \geq \frac{9}{8}$ 或 $a=0$,

$\therefore a$ 的取值范围为: $\{0\} \cup \left[\frac{9}{8}, +\infty\right)$.

(六) 集合元素互异性的应用

31. (2024·全国·高一专题练习) 集合 $A=\{a,b,c\}$ 中的三个元素分别表示某一个三角形的三边长度, 那么这个三角形一定不是 ()

A. 等腰三角形

B. 锐角三角形

C. 直角三角形

D. 钝角三角形

【答案】A

【分析】根据集合中元素的互异性可得答案.

【详解】根据集合中元素的互异性得 $a \neq b, b \neq c, a \neq c$,

故三角形一定不是等腰三角形.

故选: A.

32. (2024·高一课时练习) 若以集合 A 的四个元素 a,b,c,d 为边长构成一个四边形, 则这个四边形可能是 ()

A. 矩形

B. 平行四边形

C. 梯形

D. 菱形

【答案】C

【分析】根据集合中元素的互异性，可得 a, b, c, d 四个元素互不相等，结合选项，即可求解.

【详解】由题意，集合A的四个元素 a, b, c, d 为边长构成一个四边形，

根据集合中元素的互异性，可得 a, b, c, d 四个元素互不相等，

以四个元素 a, b, c, d 为边长构成一个四边形，结合选项，只能为梯形.

故选：C.

33. (2024·安徽宿州·高一校考阶段练习) 集合 $\{3, x, x^2 - 2x\}$ 中， x 应满足的条件

【答案】 $x \neq 0$ 且 $x \neq -1$ 且 $x \neq 3$

【分析】利用集合中元素的互异性求解.

【详解】由集合互异性知
$$\begin{cases} 3 \neq x \\ x \neq x^2 - 2x \\ 3 \neq x^2 - 2x \end{cases}$$
，故 $x \neq 0$ 且 $x \neq -1$ 且 $x \neq 3$.

34. (2024·高一课时练习) 数集 $\{1, a, a^2 - a\}$ 中的元素 a 不能取的值是_____.

【答案】0, 1, 2, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

【分析】根据集合中的元素满足互异性即可列不等式求解.

【详解】由集合中的元素满足互异性可知
$$\begin{cases} a \neq 1 \\ a^2 - a \neq 1 \\ a^2 - a \neq a \end{cases}$$
，解得 $a \neq 1$ 且 $a \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 且 $a \neq 2$ 且 $a \neq 0$,

故答案为：0, 1, 2, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

35. 【多选】(2024·江苏·高一假期作业) 已知 x, y, z 为非零实数，代数式 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{|xyz|}{xyz}$ 的值所组

成的集合是 M ，则下列判断正确的是 ()

A. $0 \notin M$

B. $2 \in M$

C. $-4 \in M$

D. $4 \in M$

【答案】CD

【分析】讨论 x, y, z 的正负数分布情况判断对应代数式的值，即可确定集合 M ，进而确定正确的选项.

【详解】当 x, y, z 均为负数时， $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{|xyz|}{xyz} = -4$ ；

当 x, y, z 两负一正时, $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{|xyz|}{xyz} = 0$;

当 x, y, z 两正一负时, $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{|xyz|}{xyz} = 0$;

当 x, y, z 均为正数时, $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{|xyz|}{xyz} = 4$;

$\therefore M = \{-4, 0, 4\}$, A、B 错误, C、D 正确.

故选: CD

(七) 集合的表示

36. (2023 春·内蒙古呼伦贝尔·高一校考开学考试) 集合 $\{x \in \mathbf{N} | x - 4 < 1\}$ 用列举法表示为 ()

- A. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ B. $\{1, 2, 3, 4\}$ C. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

【答案】A

【详解】 $\because x - 4 < 1$,

$\therefore x < 5$.

又 $x \in \mathbf{N}$,

$\therefore \{x \in \mathbf{N} | x - 4 < 1\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

故选: A

37. (2024·四川·高一校考阶段练习) 设集合 $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{6}{x+2} \in \mathbf{N}\right\}$, 则用列举法表示集合 A 为_____.

【答案】 $\{-1, 0, 1, 4\}$

【分析】根据自然数集 $\mathbf{N}$ 与整数集 $\mathbf{Z}$ 的概念分析集合 A 中的元素即可.

【详解】要使 $\frac{6}{x+2} \in \mathbf{N}$, 则 $x+2$ 可取 1, 2, 3, 6, 又 $x \in \mathbf{Z}$, 则 x 可取 -1, 0, 1, 4,

故答案为: $\{-1, 0, 1, 4\}$.

38. (2024·高一课时练习) 方程组 $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ 的解集为 ()

- A. (1, 4) B. (4, 1) C. $\{(1, 4)\}$ D. $\{(4, 1)\}$

【答案】D

【分析】根据集合的定义以及表示方法求解.

【详解】方程组 $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$,

所以方程组 $\begin{cases} 2x-5y=3 \\ x-2y=2 \end{cases}$ 的解集为 $\{(4,1)\}$,

故选: D.

39. (2024·高一课时练习) 设 a, b 是非零实数, 那么 $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}$ 可能取的所有值组成集合是_____.

【答案】 $\{2, 0, -2\}$

【分析】 根据给定条件, 按 a, b 值的正负分类计算作答.

【详解】 a, b 是非零实数, 当 $a > 0, b > 0$ 时, $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} = 2$,

当 $a < 0, b < 0$ 时, $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} = -2$, 当 $ab < 0$ 时, $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} = 0$,

所以所求集合是 $\{2, 0, -2\}$.

故答案为: $\{2, 0, -2\}$

40. (2024·高一课时练习) (1) 用列举法表示集合 $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ 是 } 15 \text{ 的约数}\}$ 为: _____;

(2) 用描述法表示“被 5 除余 1 的正整数构成的集合”为_____.

【答案】 $\{1, 3, 5, 15\}$ $\{x \mid x = 5k + 1, k \in \mathbb{N}\}$

【分析】 (1) 因为在自然数中, 15 的约数为 1, 3, 5, 15, 即可得到用列举法表示的集合;

(2) 根据集合的描述法的表示形式, 即可得到答案.

【详解】 (1) 因为在自然数中, 15 的约数为 1, 3, 5, 15, 所以用列举法表示集合 $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ 是 } 15 \text{ 的约数}\}$ 为 $\{1, 3, 5, 15\}$;

(2) 用描述法表示“被 5 除余 1 的正整数构成的集合”为 $\{x \mid x = 5k + 1, k \in \mathbb{N}\}$.

故答案为: $\{1, 3, 5, 15\}$; $\{x \mid x = 5k + 1, k \in \mathbb{N}\}$.

41. (2024·高一课时练习) 下列集合是否有区别?

(1) $\{x \mid y = \sqrt{x+1}\}$;

(2) $\{y \mid y = \sqrt{x+1}\}$;

(3) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x+1}\}$

(4) $\{(x, y) \mid \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}\}$;

(5) $\{(x, y) \mid y = x \text{ 或 } y = -x\}$

【答案】有区别

【分析】分别明确 (1), (2), (3), (4), (5), 各个集合中都有哪些元素, 从而判断集合是否有区别, 即可.

【详解】由题意可知:

(1) $\{x|y=\sqrt{x+1}\}=\{x|x\geq-1\}$, 表示大于或等于 -1 的全体实数构成的集合;

(2) $\{y|y=\sqrt{x+1}\}=\{y|y\geq 0\}$, 表示大于或等于 0 的全体实数构成的集合;

(3) $\{(x,y)|y=\sqrt{x+1}\}$, 表示曲线 $y=\sqrt{x+1}$ 上所有的点构成的集合;

(4) $\{(x,y)\left|\begin{array}{l} y=x \\ y=-x \end{array}\right.\}=\{(0,0)\}$, 表示点 $(0,0)$ 构成的集合;

(5) $\{(x,y)|y=x \text{ 或 } y=-x\}$, 表示直线 $y=x$ 或直线 $y=-x$ 上的点所构成的集合.

综上所述, 以上 5 个集合有区别.

【点睛】本题考查描述法表示集合, 属于较易题.

42. (2023·高一课时练习) 用描述法表示下列集合:

(1) 被 3 除余 1 的正整数的集合.

(2) 坐标平面内第一象限内的点的集合.

(3) 大于 4 的所有偶数.

【答案】(1) $\{x|x=3n+1, n\in N\}$; (2) $\{(x,y)|x>0, y>0\}$; (3) $\{x|x=2n, n\geq 3, n\in Z\}$.

【详解】(1) 因为集合中的元素除以 3 余数为 1, 所以集合表示为: $\{x|x=3n+1, n\in N\}$;

(2) 第一象限内的点, 其横坐标、纵坐标均大于 0, 所以集合表示为: $\{(x,y)|x>0, y>0\}$;

(3) 大于 4 的所有偶数都是正整数, 所以集合表示为: $\{x|x=2n, n\geq 3, n\in Z\}$.

43. (2024·江苏·高一假期作业) 用适当的方法表示下列集合.

(1) 方程组 $\begin{cases} 2x-3y=14 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ 的解集;

(2) 由所有小于 13 的既是奇数又是质数的自然数组成的集合;

(3) 方程 $x^2-4x+4=0$ 的实数根组成的集合;

(4) 二次函数 $y=x^2+2x-10$ 的图象上所有的点组成的集合;

(5) 二次函数 $y=x^2+2x-10$ 的图象上所有点的纵坐标组成的集合.

【答案】(1) $\{(4,-2)\}$

(2) $\{3, 5, 7, 11\}$

(3) $\{2\}$ 或 $\{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0, x \in \mathbb{R}\}$

(4) $\{(x, y) \mid y = x^2 + 2x - 10\}$

(5) $\{y \mid y = x^2 + 2x - 10\}$

【分析】(1) (2) (3) (4) (5) 根据描述法和列举法的使用特点，即可求解.

【详解】(1) 解方程组 $\begin{cases} 2x - 3y = 14 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$ ，故解集可用描述法表示为 $\{(x, y) \mid \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}\}$ ，也可用列举法表示为 $\{(4, -2)\}$.

(2) 小于 13 的既是奇数又是质数的自然数有 4 个，分别为 3, 5, 7, 11，故可用列举法表示为 $\{3, 5, 7, 11\}$.

(3) 方程 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 的实数根为 2，因此可用列举法表示为 $\{2\}$ ，也可用描述法表示为 $\{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0, x \in \mathbb{R}\}$.

(4) 二次函数 $y = x^2 + 2x - 10$ 的图象上所有的点组成的集合中，代表元素为有序实数对 (x, y) ，其中 x, y 满足 $y = x^2 + 2x - 10$ ，

由于点有无数个，则用描述法表示为 $\{(x, y) \mid y = x^2 + 2x - 10\}$.

(5) 二次函数 $y = x^2 + 2x - 10$ 的图象上所有点的纵坐标组成的集合中，代表元素为 y ，是实数，故可用描述法表示为 $\{y \mid y = x^2 + 2x - 10\}$.

题型二 集合间的基本关系

(一) 集合间基本关系的判定

44. 【多选】(2024 · 全国 · 高一假期作业) 下列关系式正确的为 ()

A. $0 \subset \{0\}$

B. $\{0\} = \emptyset$

C. $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$

D. $\emptyset \subseteq \{0\}$

【答案】CD

【分析】根据元素与集合、集合与集合间的关系判断.

【详解】对于 A. 元素与集合间是属于与不属于的关系，故 A 错误；

对于 B. $\{0\}$ 含有一个元素 0，不是空集，故 B 错误；

对于 C. 集合的元素具有无序性，以及任何集合都是它本身的子集，故 C 正确；

对于 D. 空集是任何集合的子集，故 D 正确.

故选：CD.

45. (2024·黑龙江哈尔滨·高一哈尔滨市第一二二中学校校考阶段练习) 若集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ，则下列选项不正确的是 ()

- A. $\emptyset \subseteq A$ B. $\{0, 1\} \subseteq A$ C. $\{0, 1, 2\} \subseteq A$ D. $\{0, 1, 2\} \sqsubset A$

【答案】D

【分析】根据集合与集合的包含关系逐项判断可得出合适的选项.

【详解】因为 $A = \{0, 1, 2\}$ ，则 $\emptyset \subseteq A$ ， $\{0, 1\} \subseteq A$ ， $\{0, 1, 2\} \subseteq A$ ，ABC 对，D 错.

故选：D.

46. (2024·辽宁沈阳·高一沈阳市第十中学校考期末) 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x > 0\}$ ， $B = \{x | |x| < \sqrt{5}\}$ ，则 ()

- A. $A \cap B = \emptyset$ B. $A \cup B = \mathbf{R}$
C. $B \subseteq A$ D. $A \subseteq B$

【答案】B

【分析】先解不等式得到 $A = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ， $B = (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ ，从而判断出四个选项的正误.

【详解】 $A = \{x | x^2 - 2x > 0\} = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ， $B = \{x | |x| < \sqrt{5}\} = (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ ，

故 $A \cap B = (-\sqrt{5}, 0) \cup (2, \sqrt{5})$ ，A 错误；

$A \cup B = \mathbf{R}$ ，B 正确；

B 不是 A 的子集，且 A 不是 B 的子集，CD 错误.

故选：B

47. (2024·高一课时练习) 设集合 $M = \{x | x > 1\}$ ， $P = \{y | y = x^2 - 2x - 1\}$ ，则下列关系中正确的是 ()

- A. $M = P$ B. $M \subsetneq P$ C. $P \subsetneq M$ D. $M \in P$

【答案】B

【分析】将集合 P 化简，即可由集合间的关系求解.

【详解】由 $P = \{y \mid y = x^2 - 2x - 1\} = \{y \mid y = (x-1)^2 - 2\} = \{y \mid y \geq -2\}$ ，所以 $M \subsetneq P$ ，

故选：B

48. (2024·全国·高一假期作业) 设 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ ， $N = \left\{x \mid x = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ ，则 ()

- A. $M \subsetneq N$ B. $N \subsetneq M$ C. $M = N$ D. $M \cap N = \emptyset$

【答案】B

【分析】分别分析两个集合中的元素所代表的意思即可判断选项.

【详解】解：因为 $x = k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2k+1)$ ，因为 $k \in \mathbf{Z}$ ，

所以集合 N 是由所有奇数的一半组成，

而集合 M 是由所有整数的一半组成，故 $N \subsetneq M$.

故选：B

49. 【多选】(2023 秋·陕西西安·高一高新一中校考期中) 若集合

$A = \left\{x \mid x = m + \frac{1}{6}, m \in \mathbf{Z}\right\}$ ， $B = \left\{x \mid x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, n \in \mathbf{Z}\right\}$ ， $C = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{6}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ ，则 A, B, C 之间的关系是 ()

- A. $A=B=C$ B. $B=C$ C. $A \subseteq B$ D. $B \subseteq A$

【答案】BC

【分析】根据集合间的关系分析理解.

【详解】 $\because A = \left\{x \mid x = m + \frac{1}{6}, m \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{x \mid x = \frac{3(2m+1)-2}{6}, m \in \mathbf{Z}\right\}$ ，

$B = \left\{x \mid x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, n \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{x \mid x = \frac{3n-2}{6}, n \in \mathbf{Z}\right\}$ ，且 $2m+1$ 为奇数， n 为整数，

$\therefore A \subsetneq B$ ，即 $A \subseteq B$ ，A、D 错误，C 正确；

又 $\because C = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{6}, k \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{x \mid x = \frac{3(k+1)-2}{6}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ ，且 $k+1, n$ 均为整数，

$\therefore B=C$ ，B 正确；

故选：BC.

(二) 空集及其应用

50. (2024·广西桂林·高一统考期末) 下列各式中关系符号运用正确的是 ()

- A. $0 = \emptyset$ B. $\emptyset \in \{0, 1, 2\}$ C. $1 \in \{0, 1, 2\}$ D. $\{1\} \in \{0, 1, 2\}$

【答案】C

【分析】根据集合和元素的关系,集合和集合的关系即可选出结果.

【详解】解:因为 $\emptyset$ 是集合,0是数字,所以选项A错误;

因为 $\{0,1,2\}$ 是集合,所以 $\emptyset \subseteq \{0,1,2\}$,故选项B错误;

因为1是 $\{0,1,2\}$ 中的元素,所以选项C正确;

因为 $\{1\} \subseteq \{0,1,2\}$,所以选项D错误.

故选: C

51. (2024·全国·高一专题练习) 下面四个命题中正确命题的个数是.

① $\emptyset = \{0\}$;

②任何一个集合必有两个或两个以上的子集;

③空集没有子集;

④空集是任何一个集合的子集.

A. 0个

B. 1个

C. 2个

D. 3个

【答案】B

【详解】试题分析: ① $\emptyset$ 是不含有任何元素的集合, $\{0\}$ 含有元素0, 故错误;

②含有 n 个元素的集合共有 2^n 个子集, 而 $2^n \geq 1$, 故错误;

③空集是它本身的子集, 故错误;

④空集是任何一个集合的子集, 故正确.

题型: 命题真假的判定.

52. (2023·全国·高一专题练习) 已知集合 $M = \{x | 2m < x < m+1\}$, 且 $M = \emptyset$, 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq 1$

【详解】 $\because M = \emptyset$, $\therefore 2m \geq m+1$, $\therefore m \geq 1$.

故答案为 $m \geq 1$

53. (2024·河北石家庄·高一校考阶段练习) 已知集合 $A = \{x | a-1 < x < 2a+1\}$, $B = \{x | 0 < x < 1\}$,

(1) 若 A 为空集, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 B 是 A 的真子集, 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $a \leq -2$; (2) $0 \leq a \leq 1$.

【分析】(1)根据给定条件, 利用空集的意义列式作答;

(2)利用集合的包含关系列出不等式组求解即得.

【详解】(1) 因 $A = \{x | a-1 < x < 2a+1\}$ 是空集, 则 $2a+1 \leq a-1$, 解得 $a \leq -2$,

所以实数 a 的取值范围是 $a \leq -2$;

(2) $B = \{x | 0 < x < 1\}$ 且 B 是 A 的真子集, 则
$$\begin{cases} a-1 \leq 0 \\ 2a+1 \geq 1 \\ a-1 < 2a+1 \end{cases}, \text{ 解得 } 0 \leq a \leq 1,$$

显然, $a-1=0$ 与 $2a+1=1$ 不同时成立, 于是得 $0 \leq a \leq 1$,

所以实数 a 的取值范围 $0 \leq a \leq 1$.

54. (2024·高一课时练习) 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, x \in R\}$, a 为实数.

(1) 若 A 是空集, 求 a 的取值范围;

(2) 若 A 是单元素集, 求 a 的值;

(3) 若 A 中至多只有一个元素, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) $a > 1$ (2) 0 或 1; (3) 9 或 $a \geq 1$.

【详解】试题分析: (1) 由方程无解列 $\Delta < 0$, $a \neq 0$, 解不等式可得 a 的取值范围; (2) 按一次与二次分类讨论方程解的个数: 当 $a=0$ 时, $x = -\frac{1}{2}$; 当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 0$. 解方程可得 a 的值; (3) A 中至多只有一个元素, 就是 (1) 与 (2) 两者情况, 所以取并集得 a 的取值范围.

试题解析: 解: (1) 若 A 是空集, 则只需 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 无实数解, $a=0$ 显然方程显然有解, 故 $a \neq 0$, 所以只需 $\Delta = 4 - 4a < 0$, 即 $a > 1$ 即可.

当 $a=0$ 时, 原方程化为 $2x+1=0$ 解得 $x = -\frac{1}{2}$; 当 $a \neq 0$ 时, 只需 $\Delta = 4 - 4a = 0$.

即 $a=1$, 故所求 a 的值为 0 或 1;

综合 (1) (2) 可知, A 中至多有一个元素时, a 的值为 9 或 $a \geq 1$.

(三) (真) 子集的列举与个数的计算

55. (2024·西藏拉萨·高一校考期中) 已知集合 $P = \{x | 3x^2 - 2x - 1 = 0\}$, 则集合 P 的子集为_____.

【答案】 $\emptyset, \{-\frac{1}{3}\}, \{1\}, \{-\frac{1}{3}, 1\}$

【分析】根据子集概念求解即可。

【详解】因为 $P = \{x | 3x^2 - 2x - 1 = 0\} = \{-\frac{1}{3}, 1\}$,

所以 P 的子集为 $\emptyset, \{-\frac{1}{3}\}, \{1\}, \{-\frac{1}{3}, 1\}$.

故答案为: $\emptyset, \{-\frac{1}{3}\}, \{1\}, \{-\frac{1}{3}, 1\}$.

56. (2024·江西景德镇·统考模拟预测) 已知集合 $A = \{a, b\}$ 的所有非空子集的元素之和等于 12, 则 $a + b$ 等于 ()

A. 1 B. 3 C. 4 D. 6

【答案】D

【分析】首先列出集合 A 的非空子集, 即可得到方程, 解得即可.

【详解】解: 集合 $A = \{a, b\}$ 的非空子集有 $\{a\}$ 、 $\{b\}$ 、 $\{a, b\}$,

所以 $a + b + a + b = 12$,

解得 $a + b = 6$.

故选: D

57. (2024·广西百色·高一校考阶段练习) 已知全集 $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 7\}$, 集合

$A = \{x \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

(1) 求 $A \cap B$, $A \cup B$;

(2) 写出集合 $(\complement_U A) \cap B$ 的所有子集.

【答案】(1) $A \cap B = \{4\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

(2) $\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{5, 6\}, \{3, 5, 6\}$, 共 8 个.

【分析】(1) 由题知 $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4\}$, 再计算集合交集与并集;

(2) 由题知 $(\complement_U A) \cap B = \{3, 5, 6\}$, 再求解子集即可.

【详解】(1) 解: 由题知全集 $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 7\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

集合 $A = \{x \mid x^2 - 6x + 8 = 0\} = \{2, 4\}$, 集合 $B = \{3, 4, 5, 6\}$

所以, $A \cap B = \{4\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) 解: 由 (1) 知 $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$

所以 $\complement_U A = \{3, 5, 6, 7\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{3, 5, 6\}$,

所以, $(\complement_U A) \cap B$ 的所有子集为: $\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{5, 6\}, \{3, 5, 6\}$, 共 8 个.

58. (2024·全国·高一假期作业) 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 则下列集合中是集合 A 的真子集的是 ()

A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

【答案】B

【分析】根据真子集的定义一一判断即可.

【详解】对 A, 两集合相等, 故 A 选项不是集合 A 的真子集,

对 B, 由真子集定义知, $\{2,3\}$ 是集合 A 的真子集,

C 和 D 选项的集合里含有不属于集合 A 的元素, 故 C,D 错误,

故选: B.

59. (2023 秋·江苏苏州·高一统考开学考试) 由英文单词“book”中的字母构成的集合的子集个数为 ()

A. 3

B. 6

C. 8

D. 16

【答案】C

【分析】首先写出该集合, 即可判断集合的元素个数, 根据含有 n 个元素的集合的子集个数为 2^n 个计算可得.

【详解】解: 由英文单词“book”中的字母构成的集合为 $\{b,o,k\}$, 集合中含有 3 个元素,

所以该集合的子集为 $2^3 = 8$ 个.

故选: C

60. 【多选】(2024·福建宁德·高一福建省霞浦第一中学校考期末) 已知集合 $M = \{2,4\}$, 集合 $M \subseteq N$, N 是 $\{1,2,3,4,5\}$ 的真子集, 则集合 N 可以是 ()

A. $\{2,4\}$

B. $\{2,3,4\}$

C. $\{1,2,3,4\}$

D. $\{1,2,3,4,5\}$

【答案】ABC

【分析】利用集合关系, 判断 N 中必须有 2, 4, 结合 N 是 $\{1,2,3,4,5\}$ 的真子集, 即可得求解.

【详解】集合 $M = \{2,4\}$, 集合 $M \subseteq N \square \{1,2,3,4,5\}$,

则集合 N 中至少包含 2, 4 两个元素, 又不能等于或多于 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 中的元素,

所以集合 N 可以是 $\{2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}$,

故选: ABC

61. (2024·湖南衡阳·高一衡阳市一中校考期中) 已知集合 $A = \{x | 2 < x < 6, x \in \mathbb{N}\}$, 则集合 A 的子集的个数为 ()

A. 3

B. 4

C. 7

D. 8

【答案】D

【分析】用列举法表示集合 A , 再写出其子集即可作答.

【详解】集合 $A = \{x \mid 2 < x < 6, x \in \mathbf{N}\} = \{3, 4, 5\}$,

则集合 A 的子集有: $\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}$, 共 8 个,

所以集合 A 的子集的个数为 8.

故选: D

62. (2024·广东佛山·高一校联考阶段练习) 已知 $M = \{x \in \mathbf{N} \mid \frac{6}{6-x} \in \mathbf{N}\}$, 则集合 M 的子集的个数是_____.

【答案】16

【分析】根据集合的描述确定集合 M 中元素的个数, 进而可知其子集个数.

【详解】由题设, $M = \{0, 3, 4, 5\}$, 故集合 M 的子集的个数是 $2^4 = 16$.

故答案为: 16

63. (2024·全国·高一专题练习) 已知集合 M 满足 $\{2, 3\} \subseteq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 那么这样的集合 M 的个数为

()

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【答案】C

【分析】根据集合的包含关系一一列举出来即可.

【详解】因为 $\{2, 3\} \subseteq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

所以集合 M 可以为: $\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}$,

$\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 共 8 个,

故选: C.

64. (2024·高一单元测试) 满足 $\{a\} \subseteq M \subsetneq \{a, b, c, d\}$ 的集合 M 有_____个

【答案】7

【分析】由 $\{a\} \subseteq M$, 可知集合 M 中必有元素 a , 由 $M \subsetneq \{a, b, c, d\}$, 可知 M 中还有元素 b, c, d , 中的 0 个, 1 个, 或 2 个, 进而分析集合 M 的个数.

【详解】由 $\{a\} \subseteq M \subsetneq \{a, b, c, d\}$, 知集合 M 中必有元素 a ,

且 M 中还有元素 b, c, d , 中的 0 个, 1 个, 或 2 个,

当 M 中有一个元素时, M 有 $\{a\}$ 1 个,

当 M 中有两个元素时, M 有 $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}$ 3 个,

当 M 中有三个元素时, M 有 $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$ 3 个,

综上, 集合 M 个数有 $1+3+3=7$.

故答案为: 7

65. (2023·江西吉安·统考模拟预测) 已知 $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,6,7,8\}$, 且 $A \subsetneq C \subseteq B$, 满足这样的集合 C 的个数 ()

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【答案】B

【详解】根据题意可知, 集合 C 还应包含集合 B 中除元素 1, 2 之外的其他元素;

若集合 C 中有三个元素, 则 C 可以是 $\{1,2,6\}, \{1,2,7\}, \{1,2,8\}$;

若集合 C 中有四个元素, 则 C 可以是 $\{1,2,6,7\}, \{1,2,7,8\}, \{1,2,6,8\}$;

若集合 C 中有五个元素, 则 C 可以是 $\{1,2,6,7,8\}$; 即这样的集合 C 的个数为 7 个.

故选: B

(四) 根据子集、真子集的个数求参数

66. (2024·湖北武汉·高一校联考期中) 已知集合 $A=\{x \mid ax^2+2x+1=0, x \in \mathbf{R}\}$ 的子集只有两个, 则实数 a 的值为_____.

【答案】0 或 1

【分析】分类讨论确定集合 A 中元素或元素个数后得出其子集个数, 从而得结论.

【详解】 $a=0$ 时, $A=\{-\frac{1}{2}\}$, 子集只有两个, 满足题意,

$a \neq 0$ 时, 若 $\Delta=4-4a < 0$ 即 $a > 1$, 则 $A=\emptyset$, 子集只有 1 个, 不满足题意;

若 $\Delta > 0$, 即 $a < 1$, 则集合 A 有两个元素, 子集有 4 个, 不满足题意,

$a=1$ 时, $\Delta=0$, $A=\{-1\}$, 子集只有两个, 满足题意,

所以 $a=0$ 或 1.

故答案为: 0 或 1,

67. (2024·甘肃酒泉·高一统考期末) 已知集合 $A=\{x \mid (m-1)x^2+3x-2=0\}$ 恰有两个非空真子集, 则 m 的值可以是_____. (说明: 写出满足条件的一个实数 m 的值)

【答案】2 (答案不唯一)

【分析】先根据题意得集合 A 中所含元素个数, 再通过二次方程 $\Delta > 0$ 得答案.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/995224102212011343>