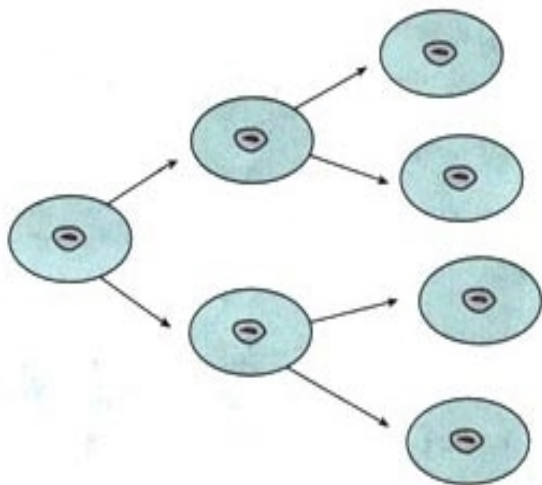


## 2.4 等比数列

# 引例:

① 如下图是某种细胞分裂的模型:



细胞分裂个数可以组成下面的数列:

**1    2    4    8    16    ...**

## 引例:

②我国古代一些学者提出：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”用现代语言叙述为：一尺长的木棒，每日取其一半，永远也取不完。这样，每日剩下的部分都是前一日的一半。如果把“一尺之棰”看成单位“1”，那么，得到的数列是：

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \dots$$

# 一、探究发现

取出这些数列，观察：有什么共同特征？

1, 2, 4, 8, 16, .....

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \dots$

共同特征：从第二项起，每一项与它的前一项的比都等于同一常数。

## (一)定义:

一般地, 如果一个数列从第二项起, 每一项与它的前一项的比等于**同一常数**, 那么这个数列就叫做**等比数列**。这个常数叫做等比数列的**公比**, 公比通常用字母 $q$ 表示。

符号表示:  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q (q \neq 0, n \geq 2, n \in N)$

## 理解:

- 1) 公差 $d$ 可为0, 公比 $q$ 不可以为0。且每一项不为0;
- 2) 公比是每一项与其前一项之比, 防止前后次序颠倒。  
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$
- 3) 证明一个数列为等比数列, 其依据是

## (二)等比数列的通项公式

由定义可知:

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \frac{a_3}{a_2} = q, \frac{a_4}{a_3} = q, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = q, \frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad (n-1 \text{ 个等式})$$



观察上式, 可以把每一个等式的左边相乘, 右边也相乘, 等式还成立。

$$\frac{\cancel{a_2}}{a_1} \cdot \frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}} \cdot \frac{\cancel{a_4}}{\cancel{a_3}} \cdot \dots \cdot \frac{\cancel{a_{n-1}}}{\cancel{a_{n-2}}} \cdot \frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}} = q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q$$

叠乘法



$$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1} \quad \longrightarrow \quad a_n = a_1 q^{n-1} \quad (a_1 \neq 0 \text{ 且 } q \neq 0)$$

### (三)等比数列的推导公式

对于等比数列中的任意两项 $a_n$ ,  $a_m$

$$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$$

证明:  $\because a_n = a_1 q^{n-1}, a_m = a_1 q^{m-1}$

$$\therefore \frac{a_n}{a_m} = \frac{a_1 q^{n-1}}{a_1 q^{m-1}} = q^{n-m}$$

可得  $a_n = a_m q^{n-m}$

**例1**、一个等比数列的第3项与第4项分别是12与18,求它的通项公式与第2项.

解: 设首项为 $a_1$ , 公比为 $q$ , 则有

$$\begin{cases} a_1 q^2 = 12 \\ a_1 q^3 = 18 \end{cases}$$

$$\text{解得 } q = \frac{3}{2}, a_1 = \frac{16}{3}$$

$$\therefore a_n = \frac{32}{9} \left(\frac{3}{2}\right)^n, a_2 = 8$$



**例2**、在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_3=20$ ， $a_6=160$ ，求 $a_n$ 。

解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$ ，由题意得

$$\begin{cases} a_1 q^2 = 20 \\ a_1 q^5 = 160 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} q = 2 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

因此， $a_n = 5 \times 2^{n-1}$

练习1、在等比数列 $\{a_n\}$ 中

(1)  $a_4 = 27, q = -3$ , 求 $a_7$ ; **-729**

(2) 若 $a_2 = 18, a_4 = 8$ , 求 $a_1$ 与 $q$ ;  $a_1 = 27, q = \frac{2}{3}$  或  $a_1 = -27, q = -\frac{2}{3}$

(3) 已知 $a_2 = 18, a_4 = 8$ , 求 $a_8$ ;  $\frac{128}{81}$

(4) 已知 $a_3 + a_6 = 36, a_4 + a_7 = 18, a_n = \frac{1}{2}$ , 求 $n$  **9**

**小结:**

- 1、注意在等比数列中，遇到 $q$ 的**偶次方**要注意解的个数。
- 2、在等比数列的方程中常用的乘，除运算
- 3、在一些特定问题中， $q^n$ 可以整体运算。

2、已知等比数列 $\{a_n\}$ ,  $a_2 = 2$ ,  $q = \sqrt{2}$ , 则 $4\sqrt{2}$ 是这个数列的第几项?

解: 由已知得:  $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\therefore$  数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为  $a_n = a_1 q^{n-1} = \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$

$\therefore 4\sqrt{2}$ 为 $\{a_n\}$ 中的项

$\therefore 4\sqrt{2} = (\sqrt{2})^n, \therefore 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{n}{2}}$

$\therefore n = 5$

即 $4\sqrt{2}$ 是等比数列 $\{a_n\}$ 的第5项

## 随堂练习

1、下列叙述中正确的是( **D** )

A、等比数列的首项不能为零，但公比可以为零。

B、等比数列的公比 $q > 0$ 时，是递增数列。

C、若数列 $\{a_n\}$ 为常数列，则此数列为等比数列。

D、已知等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = (-2)^n$ ，则它的公比为-2。

2、数列 $m, m, m, \dots, m, \dots$  ( **C** )

A、一定是等比数列

B、既是等差数列又是等比数列

C、一定是等差数列，不一定是等比数列

D、既不是等差数列，也不是等比数列

3、已知数列 $a, a(a-1), a(1-a)^2, \dots$ 是等比数列，则实数 $a$ 满足  
A、 $a \neq 1$     B、 $a \neq 0$ 或 $a \neq 1$     C、 $a \neq 0$     D、 $a \neq 1$ 且 $a \neq 0$  **D**

4、等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为2，则 $\frac{2a_1 + a_2}{2a_3 + a_4}$ 的值为 **A)**

A、 $\frac{1}{4}$     B、 $\frac{1}{2}$     C、 $\frac{1}{8}$     D、1

5、在等比数列中，已知项为 $\frac{9}{8}$ ，末项为 $\frac{1}{3}$ ，公比为 $\frac{2}{3}$ ，则项数 $n$ 等于 4

6、已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2, \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2} (n \in N^*)$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的第20项 $a_{20} = \underline{2^{20}}$

7、等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2$ ，公差不为0，且 $a_1, a_3, a_{11}$ 恰好是某等比数列的前三项，那么该等比数列公比的值等于4

## (四)等比中项

观察如下的两个数之间，插入一个什么数后三个数就会成为一个等比数列：

$$(1) 1, \pm 3, 9 \quad (2) -1, \pm 2, -4$$

$$(3) -12, \pm 6, -3 \quad (4) 1, \pm 1, 1$$

若 $a$ ,  $G$ ,  $b$ 成等比数列，那么 $G$ 叫做 $a$ 与 $b$ 的等比中项。

练一练：
$$G = \pm\sqrt{ab} \quad \text{即} \quad G^2 = ab$$

等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{8}$ ,  $q = 2$ , 则 $a_4$ 与 $a_8$ 的等比中项是 $\pm 4$ 。

## 练习

(1) 已知等比数列 $\{a_n\}$ ,  $a_3=7$ ,  $a_7=21$ , 则 $a_5=(C)$

- A. 35    B. 63    C.  $7\sqrt{3}$     D.  $\pm 7\sqrt{3}$

(2) 已知等比数列 $\{a_n\}$ ,  $a_3=7$ ,  $a_7=21$ , 则 $a_3$ 和 $a_7$ 的等比中项是( ) **D**

- A. 35    B. 63    C.  $7\sqrt{3}$     D.  $\pm 7\sqrt{3}$



## 例题:

1、一个等比数列的第1项是 $\frac{4}{9}$ ，第7项是 $\frac{1}{3}$ ，

求它的第16项； $\frac{16}{27}$

2、已知 $\{a_n\}$ 是等比数列且 $a_n > 0$ ，

$a_2a_4 + 2a_3a_5 + a_4a_6 = 25$ ，求 $a_3 + a_5$  **5**

## 巩固练习

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5=4,a_7=6$ ,求 $a_9$  **9**

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 + a_6 = 3$ , **9**

求 $a_3a_5 + 2a_4a_6 + a_5a_7$ 的值

3. 在2和30之间插入两个正数,使前3个数依次成等比数列,后三个数依次成等差数列,求插入的这两个正数. **6、18**

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/995304232100011134>