理 论 力 学

（运动学）

教 材:《理论力学》 陈国平 罗高作 主编

武汉理工大学出版社

参照书: 《建筑力学》 钟光珞 张为民 编著

中国建材工业出版社

《建筑力学》 周国瑾等 编著

同济大学出版社

《理论力学》 范钦珊 主编

清华大学出版社

10 质点动力学

第10章　质点动力学的基本方程

§10-1　动力学的基本定律

★ 第一定律（惯性定律）

★ 第二定律（力与加速度之间的关系的定律）

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

★ 第三定律（作用与反作用定律）

§10-2 质点运动微分方程的形式

将动力学基本方程($m\bar{a}=\bar{F}$)表达为微分形式的方程，称为质点的运动微分方程。

1.矢量形式 $$m\frac{\mathrm{d}^2\bar{r}}{\mathrm{d}t^2}=\bar{F}$$

2.直角坐标形式

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=X \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=Y \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=Z \end{cases}$$

（式中 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

$\Sigma X=ma_x$

$\Sigma Y=ma_y$

3.自然形式

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=F_\tau \\ m\dfrac{v^2}{\rho}=F_n \\ 0=F_b \end{cases}$$

(式中 $s=s(t)$ 为质点的弧坐标形式的运动方程。 F_τ, F_n, F_b 分别为力 $\vec{F}$ 在自然轴系 τ 轴, n 轴和 b 轴上的投影)

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt}=F_\tau \\ m\dfrac{v^2}{\rho}=F_n \\ 0=F_b \end{cases}$$

质点运动微分方程还可有极坐标形式, 柱坐标形式等等。

应用质点运动微分方程，能够求解质点动力学的两类问题。

§10-3　质点动力学两类问题

1. 第一类：已知质点的运动，求作用在质点上的力（微分问题）

解题环节和要点：

①正确选择研究对象（一般选择联络已知量和待求量的质点）。

②正确进行受力分析，画出受力图（应在一般位置上进行分析）。

③正确进行运动分析（分析质点运动的特征量）。

④选择并列出合适形式的质点运动微分方程（建立坐标系）。

⑤求解未知量。

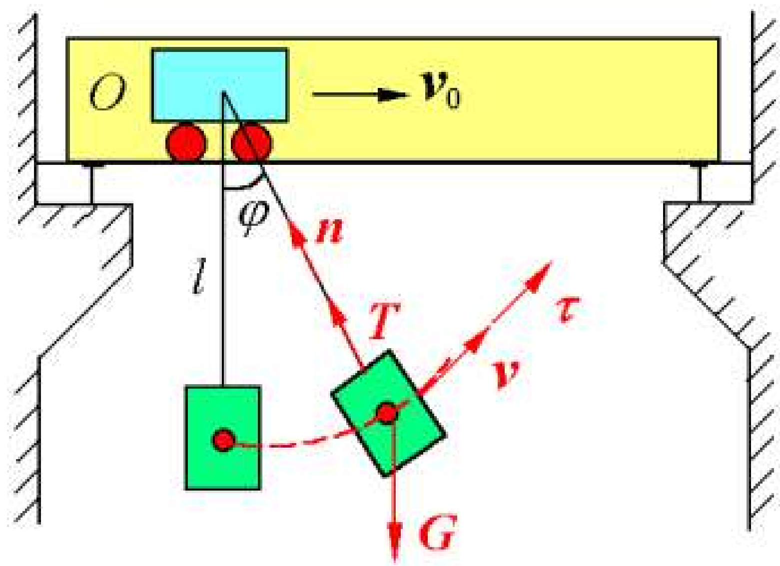
例1

桥式起重机跑车吊挂一重为G的重物，沿水平横梁作匀速运动，速度为v_0，重物中心至悬挂点距离为L。忽然刹车，重物因惯性绕悬挂点O向前摆动，**求**钢丝绳的最大拉力。

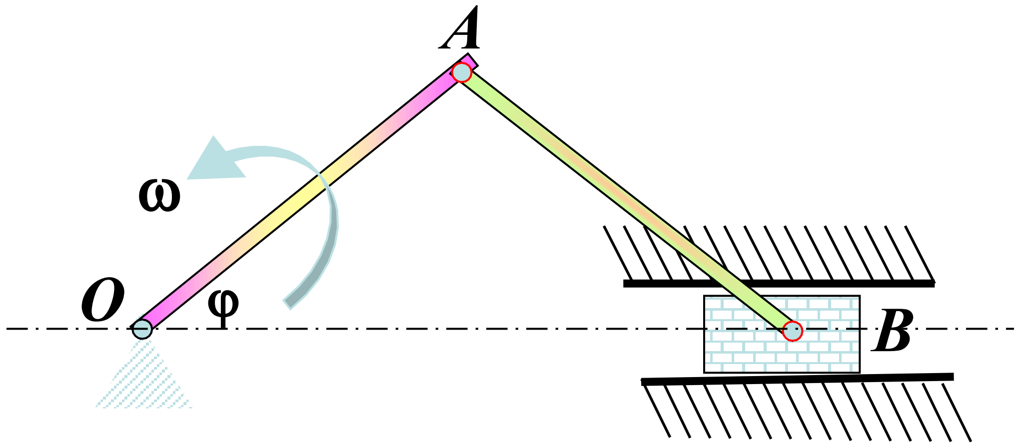
解： ①选重物(抽象为质点)为研究对象

②受力分析如图所示

③运动分析，沿以O为圆心，L为半径的圆弧摆动。

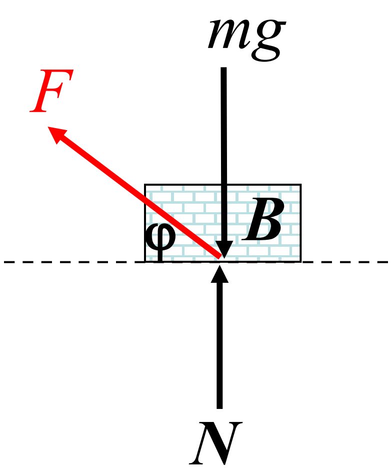


例题1.　曲柄连杆机构如图所示.曲柄*OA*以匀角速度转动, *OA* = *AB* = *r*.滑块*B*的运动方程为$x = 2r\cos\varphi$.如滑块*B*的质量为*m*, 摩擦及连杆*AB*的质量不计.求当$\varphi = \omega t = 0$ 时连杆 *AB*所受的力.



解:取滑块*B*为研究对象.

因为杆的质量不计，*AB*为二力杆。滑块受力如图。



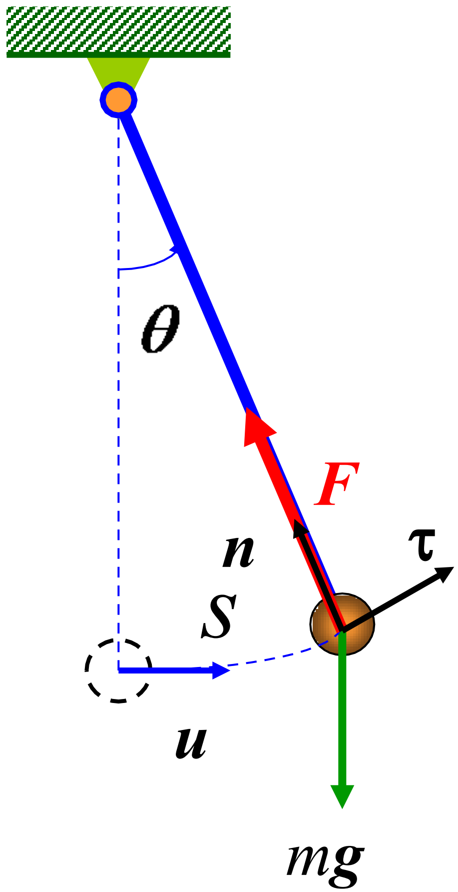
$$x = 2r\cos\varphi \qquad \varphi = \omega t$$

$$a_x = -2r\omega^2\cos\varphi$$

$$ma_x = -F\cos\varphi$$

$$F = -2\,\mathrm{m}r\omega^2$$

例： 质量为 m 长为 l 的摆在铅垂面内摆动。初始时小球的速度为 u , $\theta = 0$。分析小球的运动。



解： 1、取研究对象画受力图、 拟定坐标系

2、建立微分方程

3、求解并分析小球运动

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + m\boldsymbol{g}$$

$$\tau: \quad ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

$$n: \quad ml\dot{\theta}^2 = F - mg\cos\theta$$

运动微分方程

分析小球的运动 （微幅摆动）

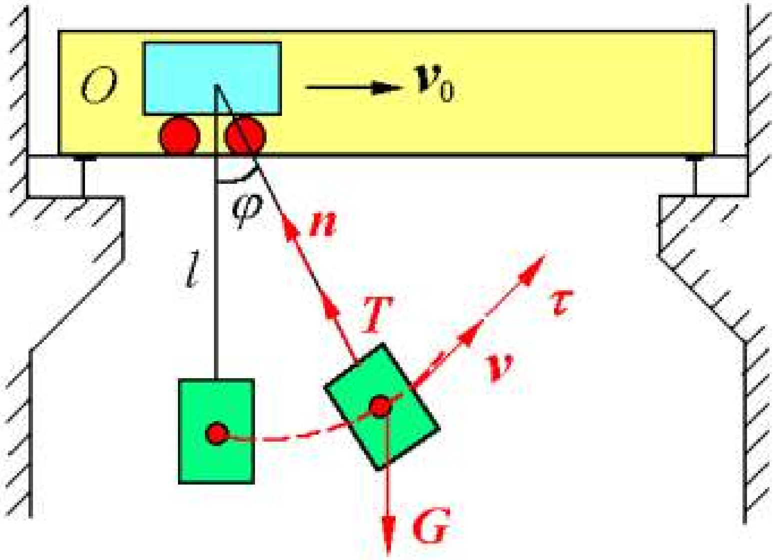
$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \qquad \sin\theta \approx \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad \omega^2 = \frac{g}{l} \qquad \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

④列出自然形式的质点运动微方程

$$ma_\tau=\sum F_\tau\ ,\quad \frac{G}{g}\frac{dv}{dt}=-G\sin\varphi \quad <1>$$

$$ma_n=\sum F_n\ ,\quad \frac{G}{g}\frac{v^2}{l}=T-G\cos\varphi \quad <2>$$



⑤求解未知量

由<2>式得 $T=G(\cos\varphi+\dfrac{v^2}{gl})$,

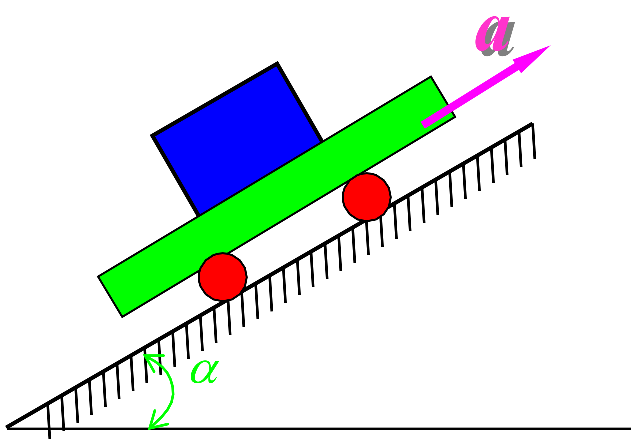
其中φ,v为变量 由<1>式知 重物作减速运动, 因此$\varphi=0$时, $T=T_{max}$

$$T_{max}=G\,(1+\frac{v_0^2}{gl})$$

[注]①减小绳子拉力途径：减小跑车速度或者增长绳子长度。

②拉力T_{max}由两部分构成, 一部分等于物体重量,称为静拉力一部分由加速度引起，称为附加动拉力。全部拉力称为动拉力。

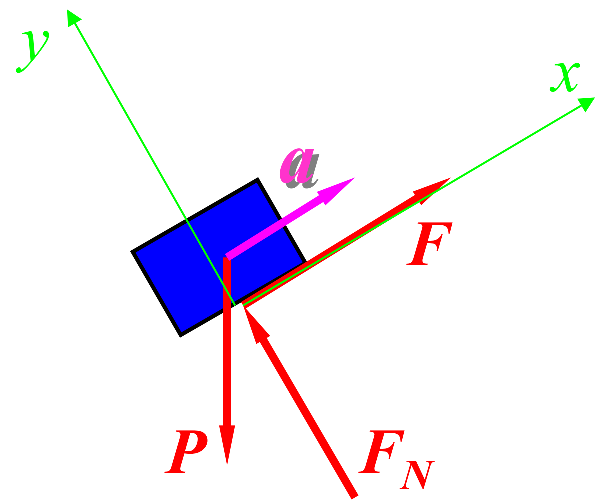
例题2　已知：P，α。求 $f_{\min}$。



解：（1）取物块为研究对象，画受力图

（2）研究对象运动分析

（3）列方程求解求知量



$$\sum F_x = F - P\sin\alpha = \frac{P}{g}a$$

$$\sum F_y = F_N - P\cos\alpha = 0$$

$$F = P(\sin\alpha + \frac{a}{g}),\ F_N = P\cos\alpha$$

$$F \le f F_N \quad \Rightarrow \quad f_{\min} = \frac{a}{g\cos\alpha} + \tan\alpha$$

11 动量定理

§11-1 动量与冲量

1 动 量

质点的动量 —— 质点的质量与质点速度的乘积

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

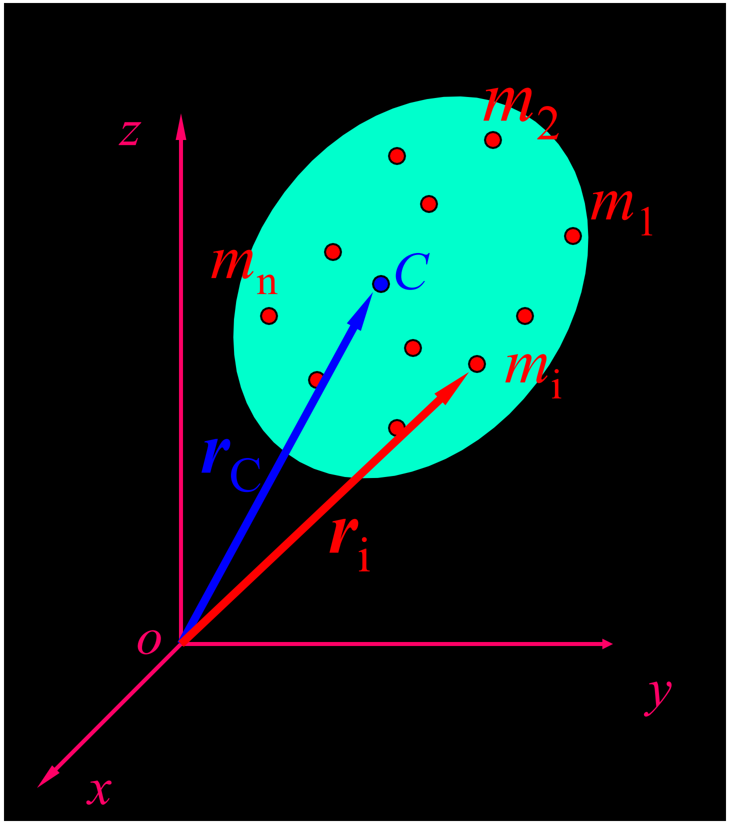
质点的动量是矢量，而且是定位矢量，它的方向与质点速度的方向一致。其单位为 kg·m/s 或 N·s

质点系的动量 ——质点系中各质点动量的矢量和，称为质点系的动量，又称为质点系 动量的主矢。

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i$$

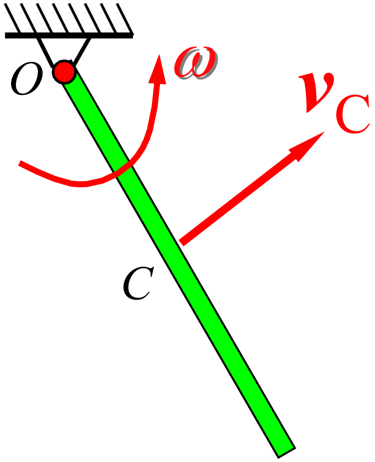
根据质点系质心的位矢公式

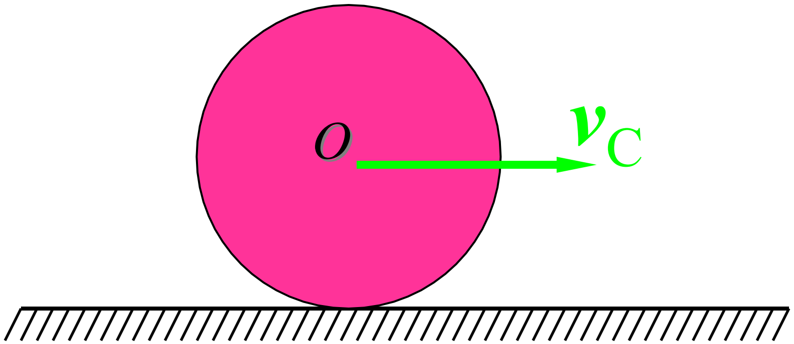
$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum m_i}=\frac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{m}$$

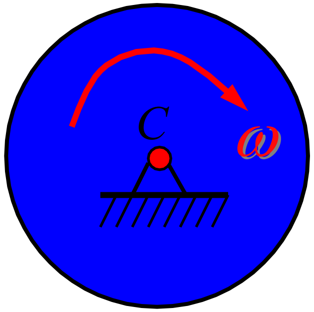


$$m\boldsymbol{v}_C=\sum m_i\boldsymbol{v}_i$$

$$\boldsymbol{p}=\sum m_i\boldsymbol{v}_i=m\boldsymbol{v}_C$$







2 冲 量

力在作用时间上的累积效应——力的冲量

a. 常力

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}t$$

b. 变力

$$\mathrm{d}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{I} = \int_0^t \boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

冲量为矢量，其单位与动量单位相同为 N·s

§11-2 动量定理

1. 质点的动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{p}=\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

质点动量的增量等于作用于质点上的力的元冲量。

$$m\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{v}_0=\int_0^t \boldsymbol{F}dt=\boldsymbol{I}$$

在某一时间间隔内，质点动量的变化等于作用于质点上的力在同一时间内的冲量。

2. 质点系的动量定理

$$d(m_i \boldsymbol{v}_i) = (\boldsymbol{F}_i^{(e)} + \boldsymbol{F}_i^{(i)})dt = \boldsymbol{F}_i^{(e)}dt + \boldsymbol{F}_i^{(i)}dt$$

$$\sum d(m_i \boldsymbol{v}_i) = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}dt + \sum \boldsymbol{F}_i^{(i)}dt$$

其中：$\sum \boldsymbol{F}_i^{(i)}dt = 0$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \sum \boldsymbol{F}_i^{e}dt = \sum d\boldsymbol{I}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{e})}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = \sum \boldsymbol{F}_i^{e}$$

$$\int_{\boldsymbol{p}_0}^{\boldsymbol{p}} d\boldsymbol{p} = \sum \int_0^t \boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{e})} dt$$

或：$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = \sum \boldsymbol{I}_i^{(e)}$

$$dp_x / dt = \sum F_x^{(e)}$$

$$dp_y / dt = \sum F_y^{(e)}$$

$$dp_z / dt = \sum F_z^{(e)}$$

微分形式

$$p_x - p_{0x} = \sum I_x^{(e)}$$

$$p_y - p_{0y} = \sum I_y^{(e)}$$

$$p_z - p_{0z} = \sum I_z^{(e)}$$

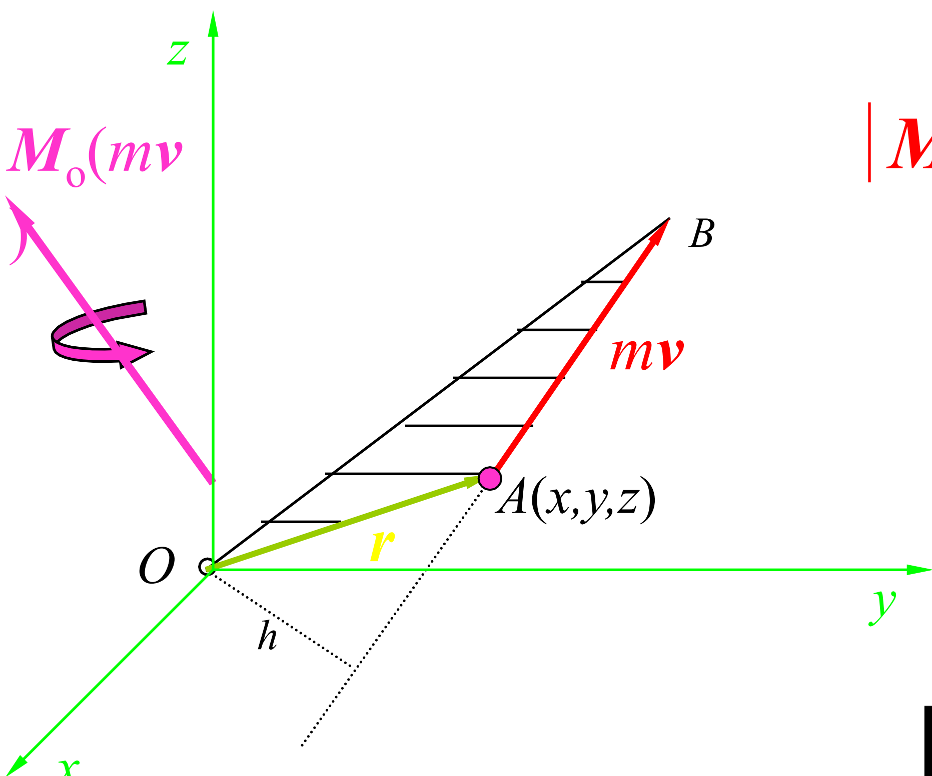
积分形式

12 动量矩定理

12.1 质点和质点系的动量矩

1. 质点的动量矩

$$\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

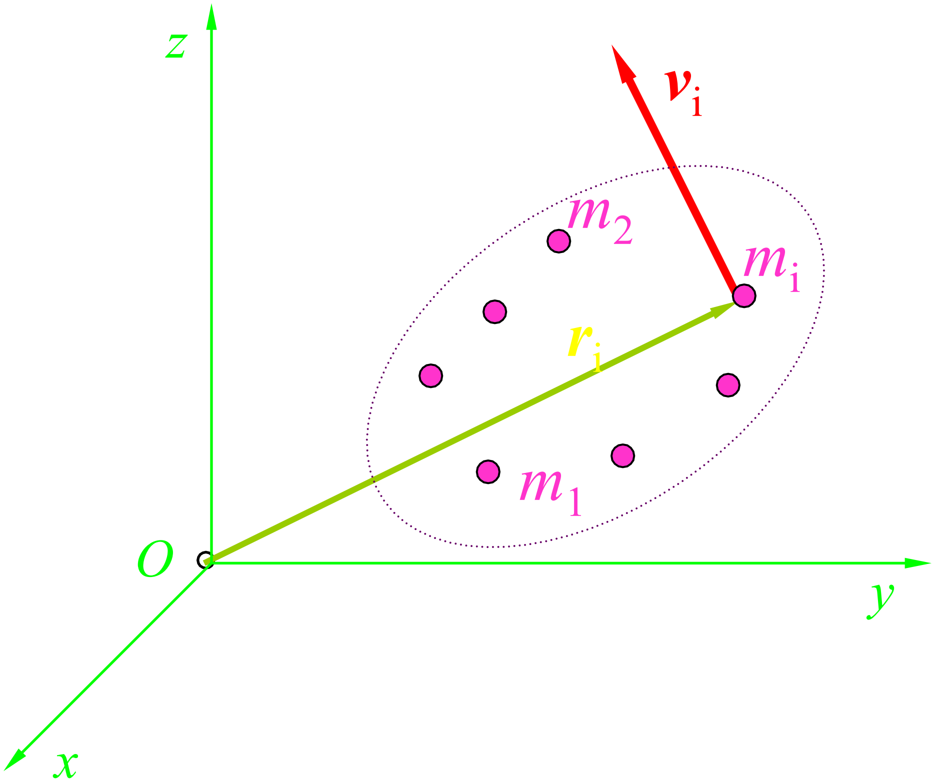


$$|\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v})| = mvh = 2\triangle OAB$$

$\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v}) \Longrightarrow$ 定位矢量

$$[\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v})]_z = M_z(m\boldsymbol{v})$$

2. 质点系的动量矩



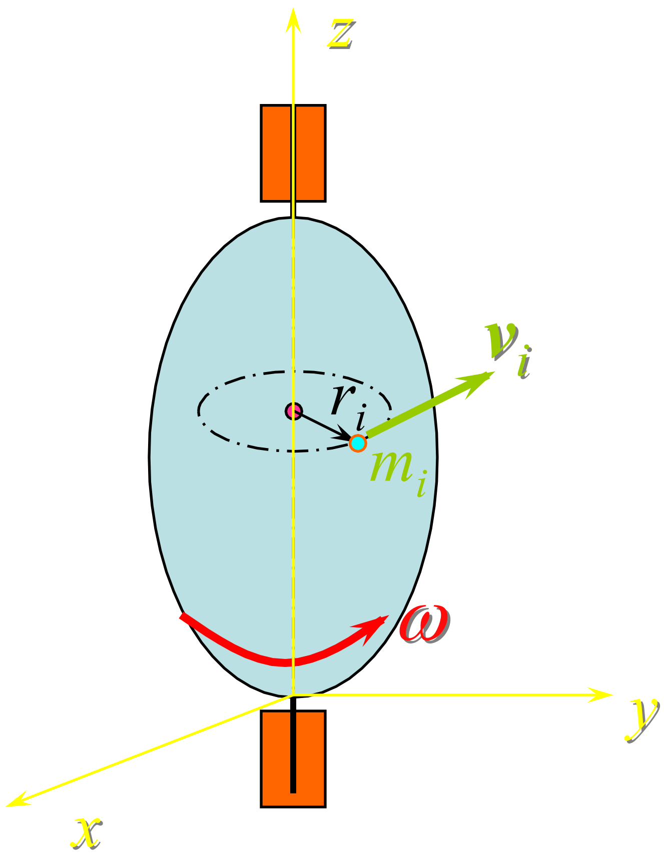
$$L_O=\sum M_O(m_i v_i)$$
$$=\sum r_i\times m v_i$$

$$L_z=\sum M_z(m_i v_i)$$

质点系中全部质点对于点O的动量矩的矢量和，称为质点系对点O的动量矩。

$$[L_O]_z=L_z$$

3. 定轴转动刚体对转轴的动量矩



$$L_z = \sum M_z(m_i \boldsymbol{v}_i) = \sum m_i v_i \cdot r_i$$

$$= \sum m_i r_i^2 \omega = \omega \sum m_i r_i^2$$

令： $\sum m_i r_i^2 = J_z$

J_z——刚体对 z 轴的转动惯量

$$L_z = J_z \omega$$

★ 绕定轴转动刚体对其转轴的动量矩等于刚体对转轴的转动惯量与转动角速度的乘积。

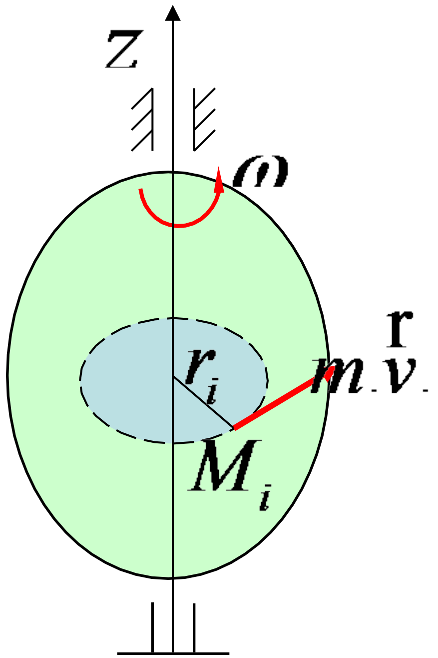
三、刚体动量矩计算

1. 平移刚体 $\bar{L}_O = \bar{M}_O(m_i\bar{v}_i) = \Sigma\bar{r}_i \times m_i\bar{v}_C = \bar{r}_C \times m\bar{v}_C$

$(\sum\bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i = \sum m_i\bar{r}_i \times \bar{v}_C = m\bar{r}_C \times \bar{v}_C)$ $\quad L_z = M_z(m\bar{v}_C)$

平移刚体可视为质量集中于质心的质点来计算对点（或轴）的动量矩。

2. 定轴转动刚体



对转轴的动量矩 $L_z = M_z(m_i\bar{v}_i) = \sum m_i r_i^2 \cdot \omega = J_z \cdot \omega$

定轴转动刚体对转轴的动量矩等于刚体对该轴转动惯量与角速度的乘积。

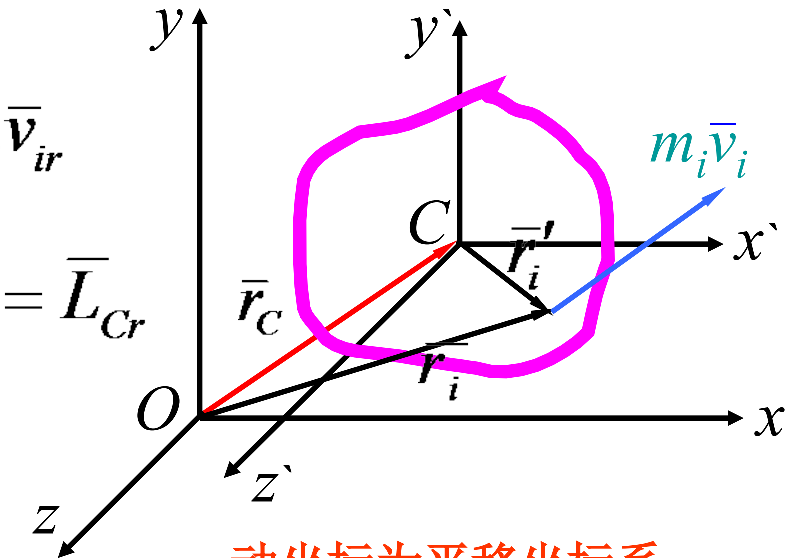
3. 平面运动刚体

质点系对质心的动量矩

$$\bar{L}_C=\Sigma\bar{r}_i'\times m_i\bar{v}_i=\Sigma\bar{r}_i'\times m_i\bar{v}_C+\Sigma\bar{r}_i'\times m_i\bar{v}_{ir}$$

$$=(\Sigma m_i\bar{r}_i')\times\bar{v}_C+\Sigma\bar{r}_i'\times m_i\bar{v}_{ir}$$

$$=(m\bar{r}_C')\times\bar{v}_C+\Sigma\bar{r}_i'\times m_i\bar{v}_{ir}=\Sigma\bar{r}_i'\times m_i\bar{v}_{ir}=\bar{L}_{Cr}$$



动坐标为平移坐标系

对质心的动量矩用绝对速度
和用相对速度计算是相等的。

质点系对O点的动量矩

$$\bar{L}_O=\Sigma\bar{r}_i\times m_i\bar{v}_i=\Sigma\bar{r}_C\times m_i\bar{v}_i+\Sigma\bar{r}_i'\times m_i\bar{v}_i$$

$$=\bar{r}_C\times\Sigma m_i\bar{v}_i+\bar{L}_C=\bar{r}_C\times m\bar{v}_C+\bar{L}_C$$

平面运动刚体 $\quad L_z=M_z(m\bar{v}_C)+J_C\cdot\omega$

平面运动刚体对垂直于质量对称平面的某轴的动量矩，等于刚体随同质心作平移时质心的动量对该轴的动量矩与绕质心轴作转动时的动量矩之和。

动量矩

平动刚体对转动轴的动量矩 $$L_z = M_z(m\bar{v}_C)$$

定轴转动刚体对转轴的动量矩 $$L_z = J_z\omega$$

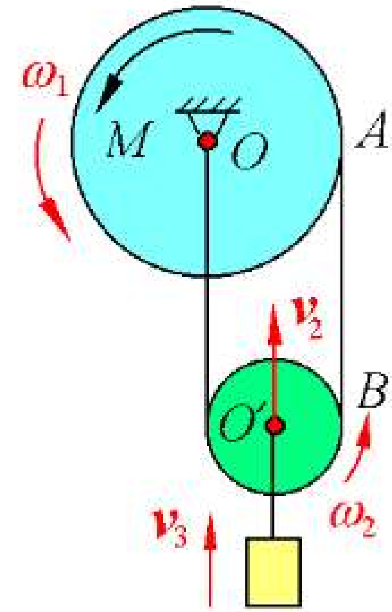
刚体平面运动的动量矩 $$L_z = M_z(m\bar{v}_C) + J_C \cdot \omega$$

[例1] 滑轮A：m_1，R_1，J_1

滑轮B：m_2，R_2，J_2； $R_1=2R_2$

物体C：m_3

求系统对O轴的动量矩。



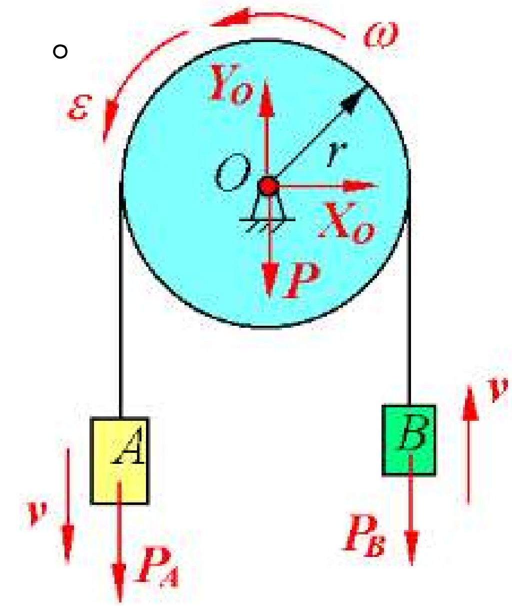
解: $L_O = L_{OA} + L_{OB} + L_{OC}$

$$= J_1\omega_1 + (J_2\omega_2 + m_2 v_2 R_2) + m_3 v_3 R_2$$

$$v_3 = v_2 = R_2\omega_2 = \frac{1}{2}R_1\omega_1$$

$$L_O = (\frac{J_1}{R_2{}^2} + \frac{J_2}{R_2{}^2} + m_2 + m_3)R_2 v_3$$

例2 求系统对O轴的动量矩。

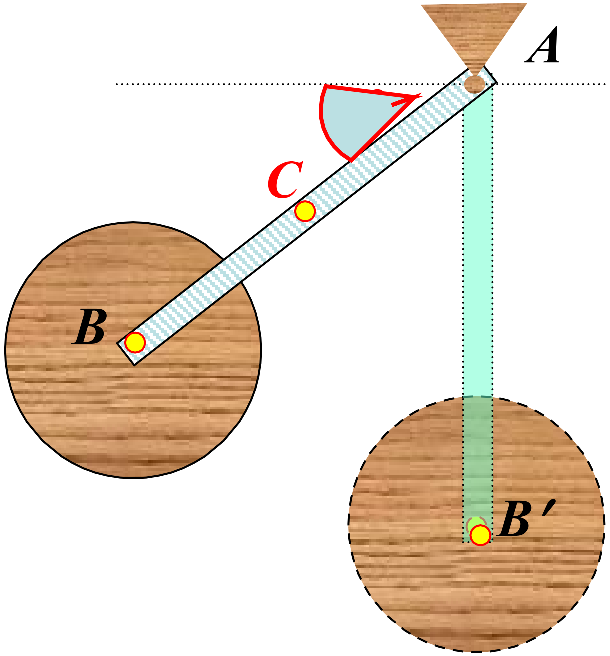


解: $v = r\omega$

$$L_O = \frac{P_A}{g} v \cdot r + \frac{P_B}{g} v \cdot r + J_O \omega$$

将$J_O = \dfrac{1}{2}\dfrac{P}{g} r^2$ 代入，得 $L_O = \dfrac{\omega r^2}{g}(P_A + P_B + \dfrac{P}{2})$

例题3. 重150N的均质圆盘*B*与重60N,长24 cm的均质直杆*AB*在 *B*处用铰链连接如图. 求系统对A点的动量矩。



圆盘*B*平动,杆*AB*作定轴转动.

$$J_A\omega + \frac{W_B}{g} l v_B = \left[\frac{60}{3\times 9.8}\times (0.24)^2\omega + \frac{150}{9.8}\times (0.24)^2 v_B\right]$$

4. 动量矩定理

1) 质点的动量矩定理

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v}) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})$$

$$= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}\times\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})$$

$$= \boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

$$= \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$$

★ 质点对某*定点*的动量矩对时间的导数，等于作用力对同一点的力矩。

3. 质点系的动量矩定理

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})+\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(i)})$$

$$\sum\frac{d}{dt}\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})+\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(i)})$$

其中： $\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(i)})=0$

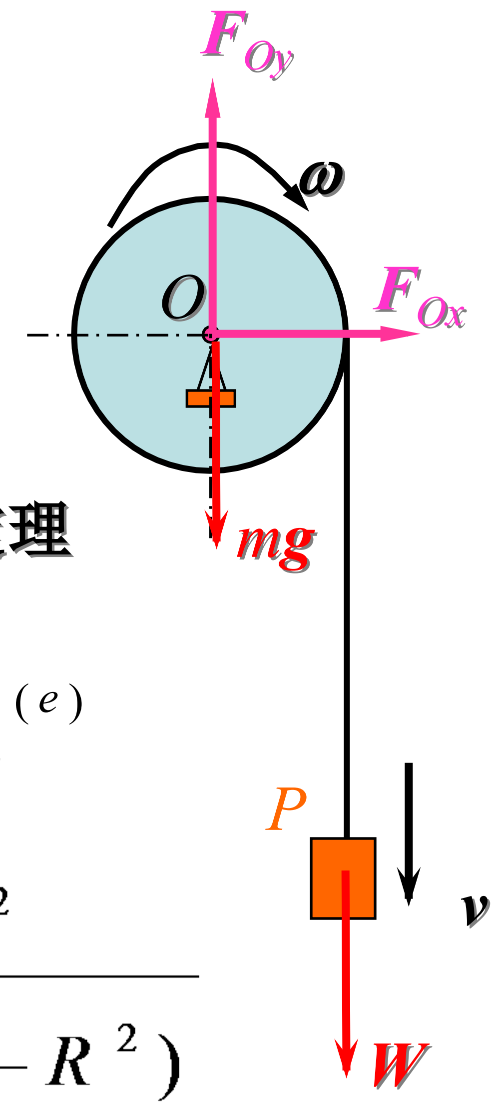
$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_O=\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{e}) \Rightarrow \frac{d}{dt}L_z=M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

★ 质点系对某*定点*的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的*外力*对同一点的矩的矢量和。

例题 1 均质圆轮半径为R、质量为m，圆轮对转轴的转动惯量为J_O。圆轮在重物P带动下绕固定轴O转动，已知重物重量为W。

求：重物下落的加速度

解：取系统为研究对象



$$L_O = J_O\omega + \frac{W}{g}vR$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$L_O = \left(\frac{J_O}{R} + \frac{W}{g}R\right)v$$

应用动量矩定理

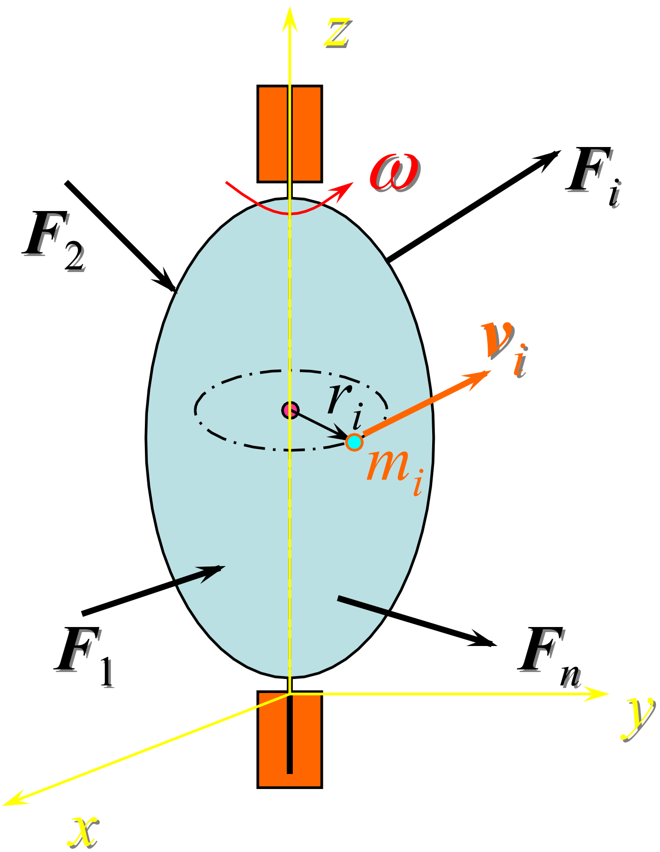
$$\frac{dL_O}{dt} = M_O^{(e)}$$

$$M_O^{(e)} = WR$$

$$\left(\frac{J_O}{R} + \frac{W}{g}R\right)\frac{dv}{dt} = WR$$

$$a = \frac{WR^2}{\left(J_O + \frac{W}{g}R^2\right)}$$

12.2 刚体绕定轴的转动微分方程



$$\frac{d}{dt}(J_z\omega)=\sum M_z(\boldsymbol{F}_i)$$

$$J_z\alpha=J_z\frac{d\omega}{dt}=J_z\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\sum M_z(\boldsymbol{F})$$

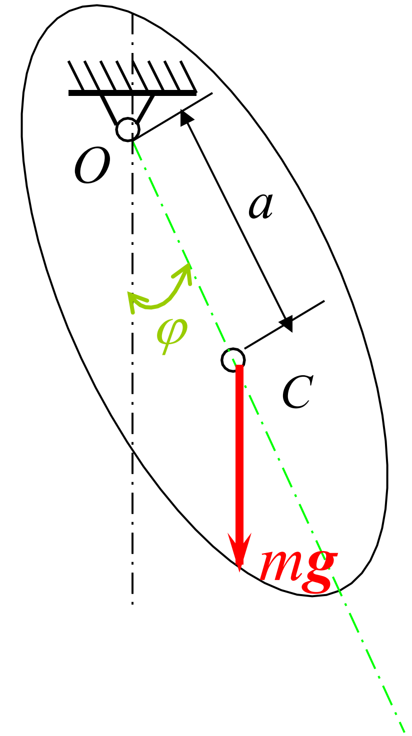
$$J_z\alpha=\Sigma M_z(\boldsymbol{F})$$

★ 质刚体对定轴的转动惯量与角加速度的乘积，等于作用于刚体的主动力对该轴的矩的代数和。

例题 2

已知：m，a，J_O。

求：　微小摆动的运动方程



解：取摆为研究对象

$$J_O \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mga\sin\varphi$$

摆作微小摆动，有：　$\sin\varphi \approx \varphi$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mga}{J_O}\varphi = 0$$

12.3 刚体对轴的转动惯量

1. 平行轴定理

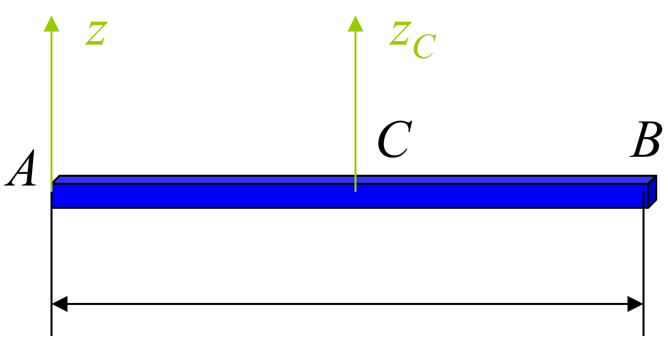
$$J_z = J_{zC} + md^2$$

J_z :物体对平行轴的转动惯量

J_{zC} :物体对质心轴的转动惯量

m :物体的质量

d :质心轴与平行轴间的距离



$$J_z = J_{Cz} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$= \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{1}{3}ml^2$$

5. 回转半径

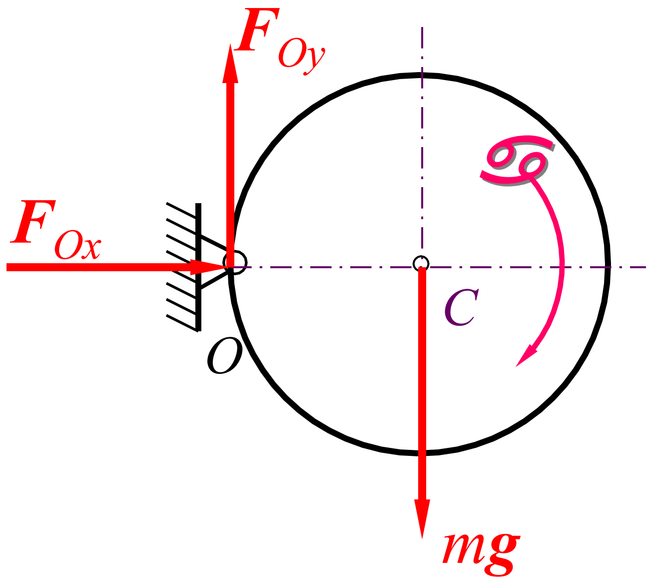
$$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}}$$ 惯性半径（回转半径）

$$J_z = m\rho^2$$

例题 3

已知：m，R 。

求：角加速度α



解： 取圆轮为研究对象

$$J_O \alpha = mgR$$

$$J_O = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$$

解得： $\alpha = \dfrac{2g}{3R}$

12.4　刚体的平面运动微分方程

$\boxed{\begin{array}{l}\text{刚体平面运动}= \\ \\ \text{刚体随质心平动}+\text{刚体绕质心转动}\end{array}}$

$$m\ddot{x}_C = \sum F_x$$

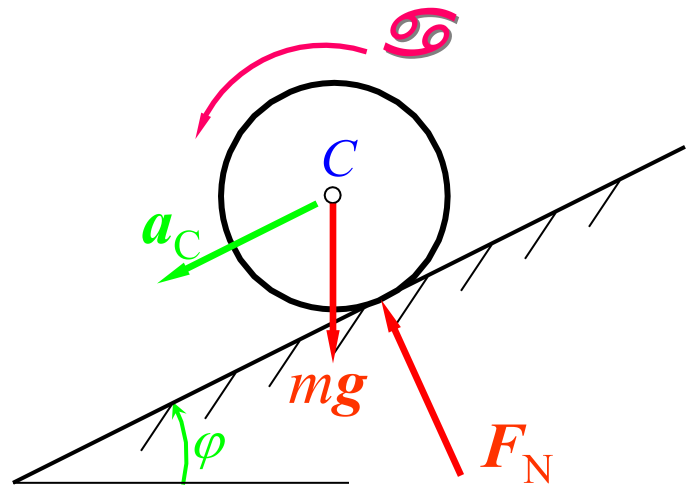
$$m\ddot{y}_C = \sum F_y$$

$$J_C\ddot{\varphi} = \sum M_C(F_i^{\mathrm{e}})$$

刚体平面运动微分方程

例题 4　　已知：m，R，f，φ。

就下列多种情况分析圆盘的运动和受力。



(a) 斜面光滑

解： 取圆轮为研究对象

$$\sum F_x = mg\sin\varphi = ma_{Cx} = ma_C$$

$$\sum F_y = mg\cos\varphi - F_N = ma_{Cy} = 0$$

$$J_C\alpha = \sum M_C = 0$$

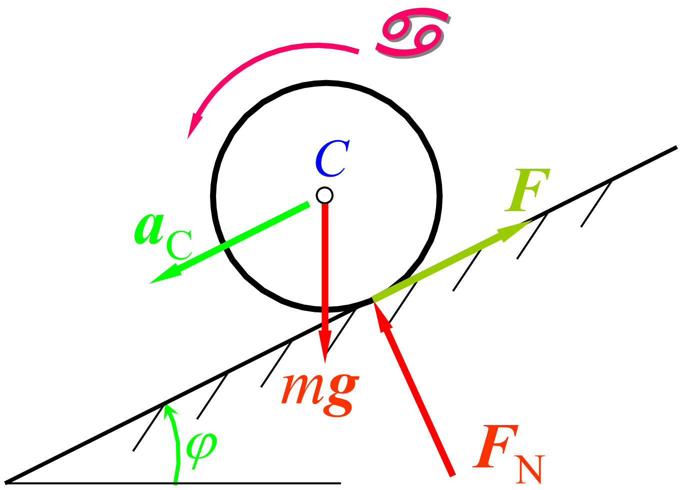
$$a_C = g\sin\varphi$$

$$\alpha = 0$$

$$F_N = mg\cos\varphi$$

圆盘作平动

(*b*) 斜面足够粗糙



$$\sum F_x = mg\sin\varphi - F = ma_C$$

$$\sum F_y = mg\cos\varphi - F_N = 0$$

$$J_C\alpha = FR \qquad a_C = R\alpha$$

$$a_C = \frac{2}{3} g\sin\varphi$$

$$\alpha = \frac{2g}{3R}\sin\varphi$$

$$F = \frac{1}{3} mg\sin\varphi$$

$$F_N = mg\cos\varphi$$

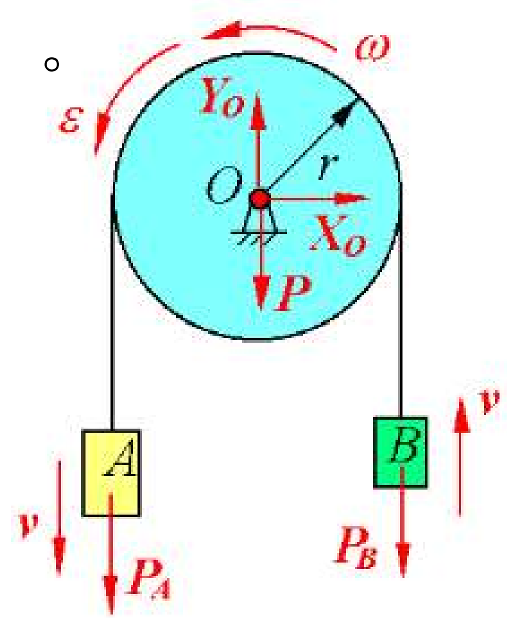
由 $F \leq fF_N$ 得:

满足纯滚的条件:

$$f \geq \frac{1}{3} g\tan\varphi$$

例5

已知：滑轮重P；半径为r；$P_A > P_B$，求ε。



解: 取整个系统为研究对象，

受力分析如图示。

运动分析： $v = r\omega$

$$\Sigma M_O(\bar{F}^{(e)}) = P_A r - P_B r = (P_A - P_B)r$$

$$L_O = \frac{P_A}{g} v \cdot r + \frac{P_B}{g} v \cdot r + J_O \omega$$

将$J_O = \dfrac{1}{2}\dfrac{P}{g}r^2$ 代入，得 $L_O = \dfrac{\omega r^2}{g}(P_A + P_B + \dfrac{P}{2})$

由动量矩定理： $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dfrac{\omega r^2}{g}(P_A + P_B + \dfrac{P}{2})] = (P_A - P_B)r$

$$\therefore \varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{r} \cdot \frac{P_A - P_B}{P_A + P_B + P/2}$$

13　动能定理

13.1质点系和刚体的动能

质点的动能

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

动能和动量都是表征机械运动的量，前者与质点速度的平方成正比，是一种标量；后者与质点速度的一次方成正比，是一种矢量，它们是机械运动的两种度量。动能与功的量纲相同，也为 *J* 。

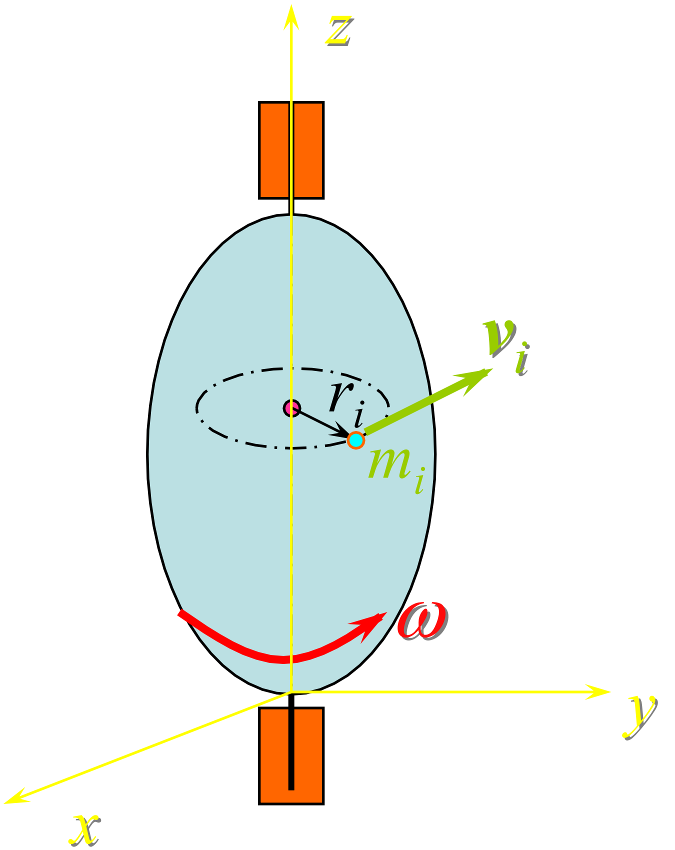
质点系的动能

$$T = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

刚体的动能

a. 平动刚体的动能 $T=\frac{1}{2}mv_C^2$

b. 定轴转动刚体的动能 $T=\frac{1}{2}J_z\omega^2$

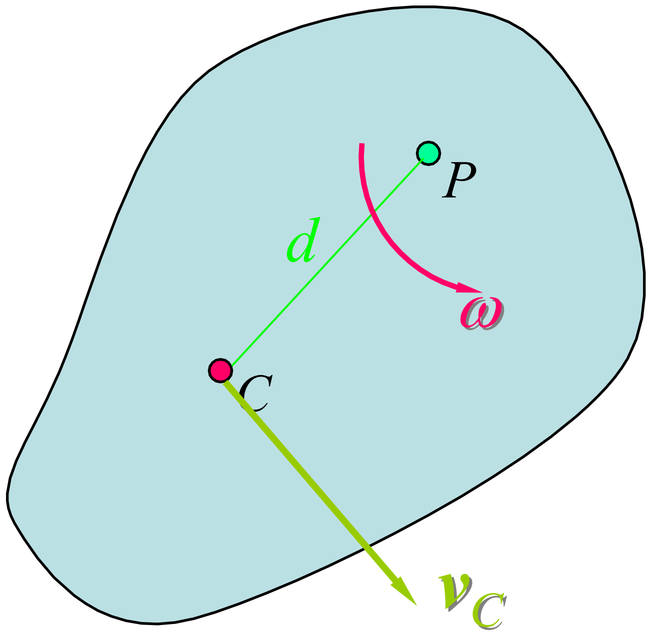


$$T=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2=\sum_i\frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2$$

$$=\frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_ir_i^2$$

$$=\frac{1}{2}J_z\omega^2$$

c. 平面运动刚体的动能



$$T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2$$

$$T=\frac{1}{2}J_P\omega^2 \qquad J_P=J_C+md^2$$

$$T=\frac{1}{2}J_P\omega^2=\frac{1}{2}(J_C+md^2)\omega^2 \qquad v_C=d\omega$$