动量定理

§11-1 动量与冲量

1. 动量

质点的动量 $m\bar{v}$

单位 $\mathrm{kg \cdot m/s}$

质点系的动量 $\bar{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i$

质心 $\bar{r}_c = \dfrac{\sum m_i \bar{r}_i}{m}$ ，$m = \sum m_i$

$$m\frac{\mathrm{d}\bar{r}_c}{\mathrm{d}t} = \sum m_i \frac{\mathrm{d}\bar{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum m_i \bar{v}_i$$

即 $\bar{p} = m\bar{v}_c$

2．冲量

常力的冲量 $\bar{I}=\bar{F}t$

变力的元冲量 $\mathrm{d}\bar{I}=\bar{F}\mathrm{d}t$

在 $t_1 \sim t_2$ 内的冲量 $\bar{I}=\int_{t_1}^{t_2}\bar{F}\mathrm{d}t$

单位：N·s

§11-2 动量定理

1.质点的动量定理

$$\frac{\mathrm{d}(m\bar{v})}{\mathrm{d}t}=\bar{F}$$

或 $$\mathrm{d}(m\bar{v})=\bar{F}\mathrm{d}t$$

称为质点动量定理的微分形式，即质点动量的增量等于作用于质点上的力的元冲量。

在 $t_1\sim t_2$内，速度由 $\bar{v}_1\sim\bar{v}_2$，有

$$m\bar{v}_2-m\bar{v}_1=\int_{t_1}^{t_2}\bar{F}\mathrm{d}t=\bar{I}$$

称为质点动量定理的积分形式，即在某一时间间隔内，质点动量的变化等于作用于质点的力在此段时间内的冲量。

2.质点系的动量定理

外力：$\overline{F}_i^{(e)}$，内力：$\overline{F}_i^{(i)}$

内力性质：（1）$\sum \overline{F}_i^{(i)} = 0$

（2）$\sum \overline{M}_O(\overline{F}_i^{(i)}) = 0$

（3）$\sum \overline{F}_i^{(i)} \mathrm{d}t = 0$

质　点：$\mathrm{d}(m_i \overline{v}_i) = \overline{F}_i^{(e)} \mathrm{d}t + \overline{F}_i^{(i)} \mathrm{d}t$

质点系：$\sum \mathrm{d}(m_i \overline{v}_i) = \sum \overline{F}_i^{(e)} \mathrm{d}t + \sum \overline{F}_i^{(i)} \mathrm{d}t$

得 $\mathrm{d}\bar{p} = \sum \bar{F}_i^{(e)}\mathrm{d}t = \sum \mathrm{d}\bar{I}_i^{(e)}$

或 $$\frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \bar{F}_i^{(e)}$$

称为质点系动量定理的微分形式，即质点系动量的增量等于作用于质点系的外力元冲量的矢量和；或质点系动量对时间的导数等于作用于质点系的外力的矢量和。

在 $t_1 \sim t_2$ 内，动量由 $\bar{p}_1 \sim \bar{p}_2$，有

$$\bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \sum_{i=1}^{n} \bar{I}_i^{(e)}$$

称为<u>质点系动量定理的积分形式</u>，即在某一时间间隔内，质点系动量的改变量等于在这段时间内作用于质点系外力冲量的矢量和。

动量定理微分形式的投影式

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = \sum F_x^{(e)} \qquad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = \sum F_y^{(e)} \qquad \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = \sum F_z^{(e)}$$

动量定理积分形式的投影式

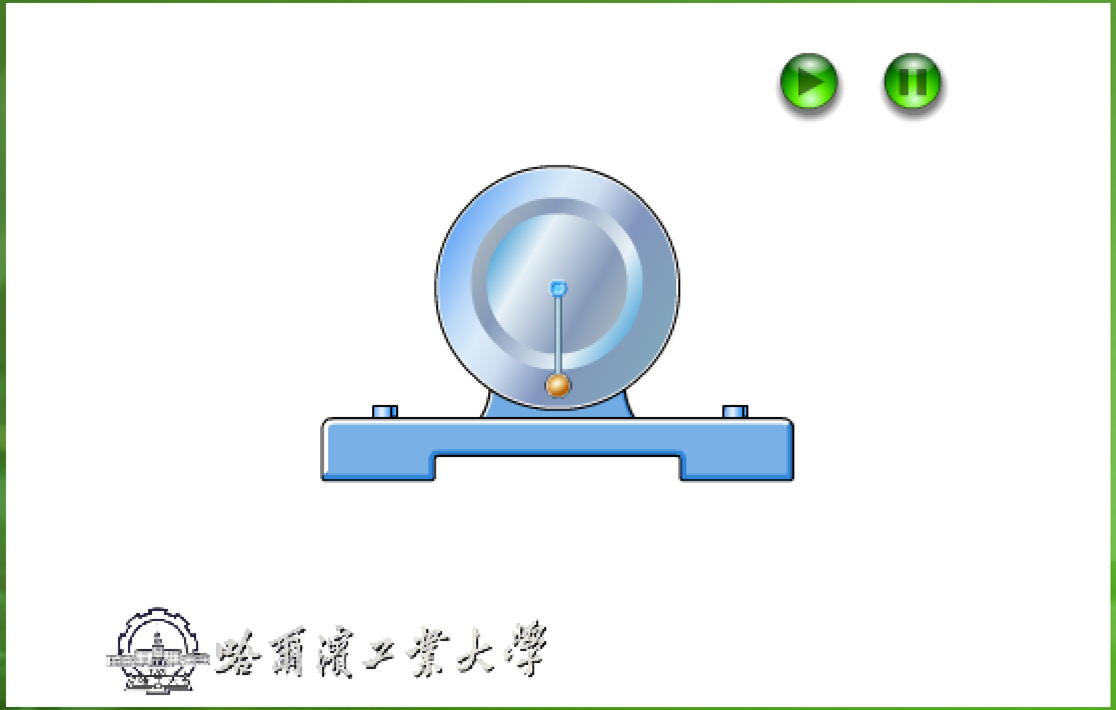
$$p_{2x} - p_{1x} = \sum I_x^{(e)} \qquad p_{2y} - p_{1y} = \sum I_y^{(e)} \qquad p_{2z} - p_{1z} = \sum I_z^{(e)}$$

3．质点系动量守恒定律

若$\sum \overline{F}^{(e)} \equiv 0$，则$\bar{p} =$ 恒矢量

若$\sum F_x^{(e)} \equiv 0$，则$p_x =$ 恒量

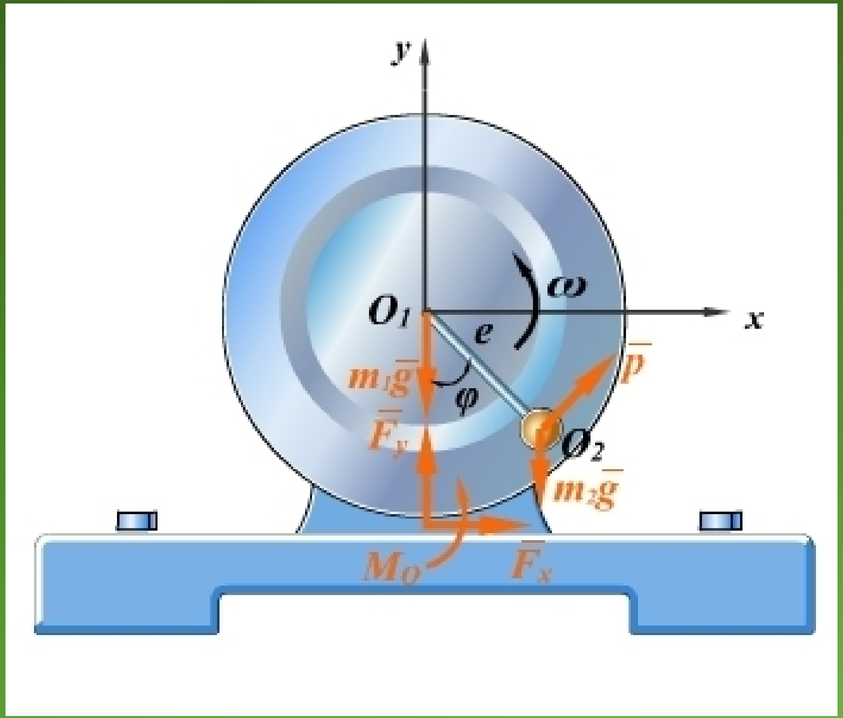
例11-1 电动机外壳固定在水平基础上，定子和外壳的质量为 m_1 ，转子质量为 m_2 。定子和机壳质心 O_1 ，转子质心 O_2 ， $O_1O_2=e$，角速度 ω 为常量。求基础的水平及铅直约束力。



解：$p = m_2 \omega e$

$$p_x = m_2 \omega e \cos\omega t$$

$$p_y = m_2 \omega e \sin\omega t$$



由 $$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = F_x$$

$$\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = F_y - m_1 g - m_2 g$$

得 $$F_x = -m_2 e\omega^2 \sin\omega t$$

$$F_y = (m_1 + m_2)g + m_2 e\omega^2 \cos\omega t$$

例11-2 流体在变截面弯管中流动，设流体不可压缩，且是定常流动。求管壁的附加动约束力。

解：dt 内流过截面的质量及动量变化为

$$\mathrm{d}m = q_V \rho \mathrm{d}t$$

$$\bar{p} - \bar{p}_0 = \bar{p}_{a_1b_1} - \bar{p}_{ab}$$

$$= (\bar{p}_{bb_1} + \bar{p}_{a_1b}) - (\bar{p}_{a_1b} + \bar{p}_{aa_1})$$

$$= \bar{p}_{bb_1} - \bar{p}_{aa_1}$$

$$= q_V \rho \mathrm{d}t(\bar{v}_b - \bar{v}_a)$$

流体受外力如图，

由动量定理，有