

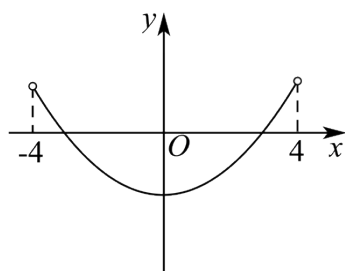
北京市海淀区2024届高三下学期期中练习（一模）数学试卷

学校：_____ 姓名：_____ 班级：_____ 考号：_____

一、选择题

1. 已知全集 $U = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$ ，集合 $A = \{x | -1 \leq x < 2\}$ ，则 $\complement_U A = ()$
A. $(-2, -1)$ B. $[-2, -1]$ C. $(-2, -1) \cup \{2\}$ D. $[-2, -1) \cup \{2\}$
2. 若复数 z 满足 $zi = 1 + i$ ，则 z 的共轭复数是 $()$
A. $-1 - i$ B. $1 + i$ C. $-1 + i$ D. $1 - i$
3. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， S_n 为其前 n 项和. 若 $a_1 = 2a_2$ ，公差 $d \neq 0$ ， $S_m = 0$ ，则 m 的值为 $()$
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
4. 已知向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2$ ， $\vec{b} = (2, 0)$ ，且 $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$ ，则 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = ()$
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
5. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上的一点到焦点 $(-\sqrt{5}, 0)$ 的距离比到焦点 $(\sqrt{5}, 0)$ 的距离大 b ，则该双曲线的方程为 $()$
A. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ C. $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ D. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
6. 设 α ， β 是两个不同的平面， l ， m 是两条直线，且 $m \subset \alpha$ ， $l \perp \alpha$. 则“ $l \perp \beta$ ”是“ $m \parallel \beta$ ”的 $()$
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ \lg(x+1), & x > 0 \end{cases}$ ，函数 $f(x)$ 的零点个数为 m ，过点 $(0, 2)$ 与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线的条数为 n ，则 m ， n 的值分别为 $()$
A. 1, 1 B. 1, 2 C. 2, 1 D. 2, 2
8. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，终边在第三象限. 则 $()$
A. $\sin \alpha - \cos \alpha \leq \tan \alpha$ B. $\sin \alpha - \cos \alpha \geq \tan \alpha$ C. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < \tan \alpha$ D. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > \tan \alpha$
9. 函数 $f(x)$ 是定义在 $(-4, 4)$ 上的偶函数，其图象如图所示， $f(3) = 0$. 设 $f'(x)$ 是 $f(x)$

的导函数，则关于 x 的不等式 $f(x+1) \cdot f'(x) \geq 0$ 的解集是()



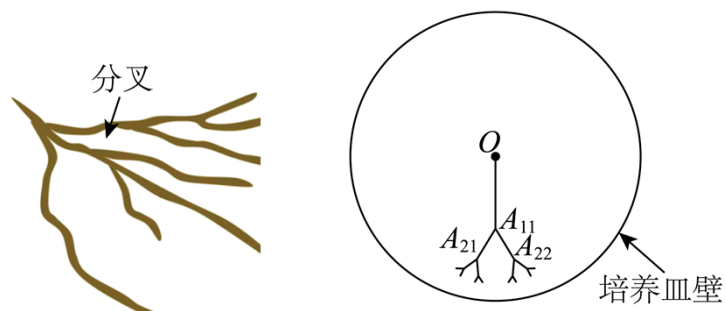
- A. $[0, 2]$ B. $[-3, 0] \cup [3, 4)$ C. $(-5, 0] \cup [2, 4)$ D. $(-4, 0] \cup [2, 3)$

10. 某生物兴趣小组在显微镜下拍摄到一种黏菌的繁殖轨迹，如左图.通过观察发现，该黏菌繁殖符合如下规律：①

黏菌沿直线繁殖一段距离后，就会以该直线为对称轴分叉（分叉的角度约为 60° ），再沿直线繁殖，...；②

每次分叉后沿直线繁殖的距离约为前一段沿直线繁殖的距离的一半.于是，该组同学将整个繁殖过程抽象为如右图所示的一个数学模型：黏菌从圆形培养皿的中心 O 开始，沿直线繁殖到 A_{11} ，然后分叉向 A_{21} 与 A_{22} 方向继续繁殖，其中 $\angle A_{21}A_{11}A_{22} = 60^\circ$ ，且

$A_{11}A_{21}$ 与 $A_{11}A_{22}$ 关于 OA_{11} 所在直线对称， $A_{11}A_{21} = A_{11}A_{22} = \frac{1}{2}OA_{11}$若 $OA_{11} = 4\text{cm}$ ，为保证黏菌在繁殖过程中不会碰到培养皿壁，则培养皿的半径 r （ $r \in \mathbf{N}^*$ ，单位：cm）至少为()



- A.6 B.7 C.8 D.9

二、填空题

11. 已知 $\ln \frac{a}{b} = 2$ ，则 $\ln a^2 - \ln b^2 =$ _____.

12. 已知 $\odot C: (x-1)^2 + y^2 = 3$ ，线段 AB 是过点 $(2,1)$ 的弦，则 $|AB|$ 的最小值为_____.

13. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$ ，给出下列四个结论：

①函数 $f(x)$ 是奇函数;

② $\forall k \in \mathbf{R}$, 且 $k \neq 0$, 关于 x 的方程 $f(x) - kx = 0$ 恰有两个不相等的实数根;

③已知 P 是曲线 $y = f(x)$ 上任意一点, $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, 则 $|AP| \geq \frac{1}{2}$;

④设 $M(x_1, y_1)$ 为曲线 $y = f(x)$ 上一点, $N(x_2, y_2)$ 为曲线 $y = -f(x)$ 上一点. 若 $|x_1 + x_2| = 1$, 则 $|MN| \geq 1$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、双空题

14. 若 $(x-2)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 则 $a_0 =$ _____; $\frac{a_1 + a_3}{a_0 + a_2 + a_4} =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x$, 则 $f\left(\frac{5}{4}\pi\right) =$ _____; 函数 $f(x)$ 的图象的一个对称中心的坐标为_____.

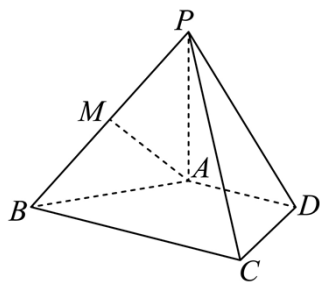
四、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $b \sin C + \sqrt{3}c \cos B = 2c$.

(1)求 $\angle B$;

(2)若 $a = 2\sqrt{3}$, $b + c = 4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, M 为 BP 的中点, $AM \parallel$ 平面 CDP .



(1)求证: $BC = 2AD$;

(2)若 $PA \perp AB$, $AB = AP = AD = CD = 1$, 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使四棱锥 $P-ABCD$ 存在且唯一确定.

(i) 求证: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;

(ii) 设平面 $CDP \cap$ 平面 $BAP = l$, 求二面角 $C-l-B$ 的余弦值.

条件①: $BP = DP$;

条件②: $AB \perp PC$;

条件③: $\angle CBM = \angle CPM$.

注: 如果选择的条件不符合要求, 第(1)问得0分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. 某学校为提升学生的科学素养, 要求所有学生在学年中完成规定的学习任务, 并获得相应过程性积分. 现从该校随机抽取100名学生, 获得其科普测试成绩(百分制, 且均为整数)及相应过程性积分数据, 整理如下表:

科普测试成绩 x	科普过程性积分	人数
$90 \leq x \leq 100$	4	10
$80 \leq x < 90$	3	a
$70 \leq x < 80$	2	b
$60 \leq x < 70$	1	23
$0 \leq x < 60$	0	2

(1) 当 $a = 35$ 时,

(i) 从该校随机抽取一名学生, 估计这名学生的科普过程性积分不少于3分的概率;

(ii) 从该校科普测试成绩不低于80分的学生中随机抽取2名, 记 X 为这2名学生的科普过程性积分之和, 估计 X 的数学期望 $E(X)$;

(2) 从该校科普过程性积分不高于1分的学生中随机抽取一名, 其科普测试成绩记为 Y_1 , 上述100名学生科普测试成绩的平均值记为 Y_2 . 若根据表中信息能推断 $Y_1 \leq Y_2$ 恒成立, 直接写出 a 的最小值.

19. 已知椭圆 $G: x^2 + my^2 = m$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, A_1 , A_2 分别是 G 的左、右顶点, F 是 G 的右焦点.

(1) 求 m 的值及点 F 的坐标;

(2) 设 P 是椭圆 G 上异于顶点的动点, 点 Q 在直线 $x = 2$ 上, 且 $PF \perp FQ$, 直线 PQ 与 x 轴交于点 M . 比较 $|MP|^2$ 与 $|MA_1| \cdot |MA_2|$ 的大小.

20. 已知函数 $f(x) = xe^{a - \frac{1}{2}x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若函数 $g(x) = |f(x) + e^{-2}a|, x \in (0, +\infty)$ 存在最大值, 求 a 的取值范围.

21. 已知: $Q: a_1, a_2, \dots, a_m \ (m \geq 2, m \in \mathbf{N}^*)$ 为有穷正整数数列, 其最大项的值为 m , 且

当 $k = 0, 1, \dots, m-1$ 时, 均有 $a_{km+i} \neq a_{km+j} \ (1 \leq i < j \leq m)$. 设 $b_0 = 0$, 对于 $t \in \{0, 1, \dots, m-1\}$,

定义 $b_{t+1} = \min \{n | n > b_t, a_n > t\}$, 其中, $\min M$ 表示数集 M 中最小的数.

(1)若 $Q: 3, 1, 2, 2, 1, 3, 1, 2, 3$, 写出 b_1, b_3 的值;

(2)若存在 Q 满足: $b_1 + b_2 + b_3 = 11$, 求 m 的最小值;

(3)当 $m = 2024$ 时, 证明: 对所有 Q , $b_{2023} \leq 20240$.

参考答案

1. 答案 : D

解析: 全集 $U = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 集合 $A = \{x | -1 \leq x < 2\}$,

所以 $\complement_U A = [-2, -1) \cup \{2\}$.

故选: D

2. 答案: B

解析: 解: 复数 z 满足 $zi = 1 + i$, 所以 $z = \frac{1+i}{i} = \frac{(1+i)i}{i^2} = \frac{-1+i}{-1} = 1-i$.

所以 z 的共轭复数是 $1+i$.

故选: B.

3. 答案 : B

解析: 由已知 $a_1 = 2a_2 = 2(a_1 + d)$, 得 $a_1 = -2d$,

又 $S_m = ma_1 + \frac{m(m-1)}{2}d = -2md + \frac{m(m-1)}{2}d = 0$, 又 $d \neq 0$,

所以 $-2m + \frac{m(m-1)}{2} = 0$, 解得 $m = 5$ 或 $m = 0$ (舍去)

故选: B.

4. 答案 : C

解析: 由已知 $|a| = 2, |b| = 2$,

所以 $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 = 4 + 2 \times 2 \times 2 \times \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + 4 = 4$,

得 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\frac{1}{2}$, 又 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [0, \pi]$,

所以 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2\pi}{3}$.

故选: C.

5. 答案 : D

解析: 由题知 $c = \sqrt{5}$, 根据题意, 由双曲线的定义知 $2a = b$, 又 $a^2 + b^2 = c^2$,

所以 $5a^2 = 5$, 得到 $a^2 = 1, b^2 = 4$, 所以双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$,

故选：D.

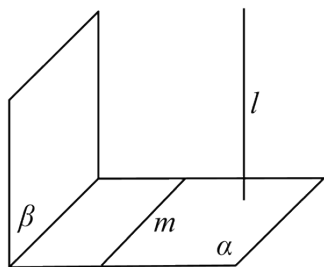
6. 答案：A

解析： $l \perp \beta$ ，且 $l \perp \alpha$ ，所以 $\alpha // \beta$ ，又 $m \subset \alpha$ ，所以 $m // \beta$ ，充分性满足，

如图：满足 $m // \beta$ ， $m \subset \alpha$ ， $l \perp \alpha$ ，但 $l \perp \beta$ 不成立，故必要性不满足，

所以“ $l \perp \beta$ ”是“ $m // \beta$ ”的充分而不必要条件.

故选：A.



7. 答案：B

解析：令 $f(x)=0$ ，即 $x \leq 0$ 时， $x^3=0$ ，解得 $x=0$ ，

$x > 0$ 时， $\lg(x+1)=0$ ，无解，故 $m=1$ ，

设过点 $(0,2)$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切的直线的切点为 (x_0, y_0) ，

当 $x < 0$ 时， $f'(x)=3x^2$ ，则有 $y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$ ，

有 $2-x_0^3=3x_0^2(-x_0)$ ，整理可得 $x_0^3=-1$ ，即 $x_0=-1$ ，

即当 $x_0 < 0$ 时，有一条切线，

当 $x > 0$ 时， $f'(x)=\frac{\lg e}{x+1}$ ，则有 $y-\lg(x_0+1)=\frac{\lg e}{x_0+1}(x-x_0)$ ，

有 $2-\lg(x_0+1)=\frac{\lg e}{x_0+1}(-x_0)$ ，整理可得 $(2+\lg e)x_0+2-(x_0+1)\lg(x_0+1)=0$ ，

令 $g(x)=(2+\lg e)x+2-(x+1)\lg(x+1)(x > 0)$ ，

则 $g'(x)=2-\lg(x+1)$ ，

令 $g'(x)=0$ ，可得 $x=99$ ，

故当 $x \in (0, 99)$ 时， $g'(x) > 0$ ，即 $g(x)$ 在 $(0, 99)$ 上单调递增，

当 $x \in (99, +\infty)$ 时， $g'(x) < 0$ ，即 $g(x)$ 在 $(99, +\infty)$ 上单调递减，

由 $g(99)=(2+\lg e) \times 99+2-200=99 \lg e > 0$ ，

$g(0) = 2 - 0 = 2 > 0$, 故 $g(x)$ 在 $x \in (0, 99)$ 上没有零点,

又 $g(999) = (2 + \lg e) \times 999 + 2 - 1000 \times 3 = 999 \lg e - 1000 < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(99, 999)$ 上必有唯一零点,

即当 $x_0 > 0$ 时, 亦可有一条切线符合要求,

故 $n = 2$.

故选: B.

8. 答案: C

解析: 由题意可得 $\sin \alpha < 0$ 、 $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha > 0$,

对A: 当 $\sin \alpha \rightarrow 0^-$ 时, $\cos \alpha \rightarrow -1$, 则 $\sin \alpha - \cos \alpha \rightarrow 1$, $\tan \alpha \rightarrow 0$,

此时 $\sin \alpha - \cos \alpha > \tan \alpha$, 故A错误;

对B: 当 $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ 时, $\sin \alpha - \cos \alpha = \sin \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{4} = 0 < \tan \frac{5\pi}{4} = 1$, 故B错误;

对C、D: $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha$, 由 $-1 < \cos \alpha < 0$,

故 $\cos^2 \alpha \in (0, 1)$, 则 $\cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha < \tan \alpha$, 即 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < \tan \alpha$,

故C正确, D错误.

故选: C.

9. 答案: D

解析: 由 $f(3) = 0$, 且 $f(x)$ 为偶函数, 故 $f(-3) = 0$,

由导数性质结合图象可得当 $x \in (-4, 0)$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x \in (0, 4)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x = 0$ 时, 即 $f'(0) = 0$,

则由 $f(x+1) \cdot f'(x) \geq 0$, 有 $\begin{cases} -4 < x+1 < 4 \\ -4 < x < 4 \end{cases}$, 解得 $-4 < x < 3$,

亦可得 $\begin{cases} f(x+1) > 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} f(x+1) < 0 \\ f'(x) < 0 \end{cases}$, 或 $f(x+1) = 0$, 或 $f'(x) = 0$,

由 $\begin{cases} f(x+1) > 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} -4 < x+1 < -3 \\ 0 < x < 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3 < x+1 < 4 \\ 0 < x < 4 \end{cases}$, 即 $2 < x < 3$,

由 $\begin{cases} f(x+1) < 0 \\ f'(x) < 0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} -3 < x+1 < 3 \\ -4 < x < 0 \end{cases}$, 即 $-4 < x < 0$,

由 $f(x+1)=0$ ，可得 $x+1=\pm 3$ ，即 $x=2$ 或 $x=-4$ （舍去，不在定义域内），

由 $f'(x)=0$ ，可得 $x=0$ ，

综上所述，关于 x 的不等式 $f(x+1) \cdot f'(x) \geq 0$ 的解集为 $(-4, 0] \cup [2, 3)$ 。

故选：D.

10. 答案：C

解析：由题意可知， $OA_{11}=4\text{cm}$ ，只要计算出黏菌沿直线一直繁殖下去，在 OA_{11} 方向上的距离的范围，即可确定培养皿的半径的范围，

依题意可知黏菌的繁殖规律，由此可得每次繁殖在 OA_{11} 方向上前进的距离依次为：

$$4, 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2}, L,$$

$$\text{则 } 4 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 + \frac{5\sqrt{3}}{4} > 5 + \frac{8}{4} = 7,$$

黏菌无限繁殖下去，每次繁殖在 OA_{11} 方向上前进的距离和即为两个无穷等比递缩数列的和，

$$\text{即 } \left(4 + 1 + \frac{1}{4} + L \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + L \right) \approx \frac{4}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{16 + 4\sqrt{3}}{3} < \frac{16 + 8}{3} = 8,$$

综合可得培养皿的半径 r ($r \in \mathbb{N}^*$ ，单位：cm) 至少为 8cm ，

故选：C

11. 答案：4

解析：因为 $\ln \frac{a}{b} = 2$ ，

$$\text{所以 } \ln a^2 - \ln b^2 = \ln \frac{a^2}{b^2} = \ln \left(\frac{a}{b} \right)^2 = 2 \ln \frac{a}{b} = 4.$$

故答案为：4.

12. 答案：2

解析：由 $(2-1)^2 + 1^2 = 2 < 3$ ，故点 $(2, 1)$ 在圆的内部，

且该圆圆心为 $(1, 0)$ ，半径为 $\sqrt{3}$ ，

设圆心到直线 AB 的距离为 d ，

由垂径定理可得 $\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = r^2 - d^2$ ，即 $|AB| = 2\sqrt{3-d^2}$ ，

故当 d 取最大值时， $|AB|$ 有最小值，

$$\text{又 } d_{\max} = \sqrt{(1-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\text{故 } |AB| = 2\sqrt{3-d^2} \geq 2\sqrt{3-2} = 2.$$

故答案为：2.

13. 答案：② ③ ④

解析：对①：令 $x^3 - x \geq 0$ ，即有 $x(x+1)(x-1) \geq 0$ ，即 $x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty]$ ，故函数 $f(x)$ 不是奇函数，故① 错误；

$$\text{对②： } f(x) - kx = \sqrt{x^3 - x} - kx = 0, \text{ 即 } \sqrt{x^3 - x} = kx,$$

当 $x=0$ 时，有 $\sqrt{0} - 0 = 0$ ，故 0 是该方程的一个根；

当 $x \neq 0$ ， $k > 0$ 时，由 $\sqrt{x^3 - x} = kx$ ，故 $x > 0$ ，结合定义域可得 $x \in [1, +\infty]$ ，

$$\text{有 } x^3 - x = k^2 x^2, \text{ 即 } x(x^2 - k^2 x - 1) = 0,$$

$$\text{令 } x^2 - k^2 x - 1 = 0, \Delta = k^4 + 4 > 0, \text{ 有 } x = \frac{k^2 + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \text{ 或 } x = \frac{k^2 - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \text{ (负值舍去)}$$

$$\text{, 则 } x = \frac{k^2 + \sqrt{k^2 + 4}}{2} > \frac{0 + \sqrt{0 + 4}}{2} = 1,$$

故 $x^2 - k^2 x - 1 = 0$ 必有一个大于 1 的正根，即 $f(x) - kx = 0$ 必有一个大于 1 的正根；

当 $x \neq 0$ ， $k < 0$ 时，由 $\sqrt{x^3 - x} = kx$ ，故 $x < 0$ ，结合定义域有 $x \in [-1, 0)$ ，

$$\text{有 } x^3 - x = k^2 x^2, \text{ 即 } x(x^2 - k^2 x - 1) = 0,$$

$$\text{令 } x^2 - k^2 x - 1 = 0, \Delta = k^4 + 4 > 0,$$

$$\text{有 } x = \frac{k^2 - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \text{ 或 } x = \frac{k^2 + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \text{ (正值舍去),}$$

令 $k^2 + 4 = t > 4$ ，即 $k^2 = t - 4$ ，则

$$x = \frac{k^2 - \sqrt{k^2 + 4}}{2} = \frac{t - 4 - \sqrt{t}}{2} = \frac{\left(\sqrt{t} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}}{2} > \frac{\left(\sqrt{4} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}}{2} = -1,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/996005105154010133>