

新疆哈密石油中学 2024 年高三 4 月第二次调研测试数学试题理试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{e^x} (x \in \mathbb{R})$ ，若关于 x 的方程 $f(x) - m + 1 = 0$ 恰好有 3 个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围

围为 ()

- A. $(\frac{\sqrt{2e}}{2e}, 1)$ B. $(0, \frac{\sqrt{2e}}{2e})$ C. $(1, \frac{1}{e} + 1)$ D. $(1, \frac{\sqrt{2e}}{2e} + 1)$

2. 下列函数中，值域为 $\mathbb{R}$ 且为奇函数的是 ()

- A. $y = x + 2$ B. $y = \sin x$ C. $y = x - x^3$ D. $y = 2^x$

3. 已知复数 z 满足 $(1 + 2i)z = 4 + 3i$ ，则 z 的共轭复数是 ()

- A. $2 - i$ B. $2 + i$ C. $1 + 2i$ D. $1 - 2i$

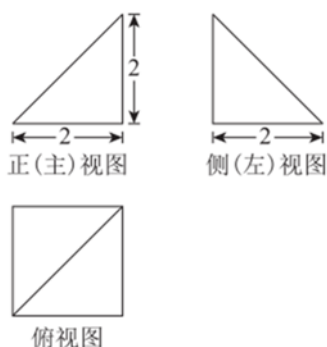
4. 二项式 $(\frac{x}{2} - \frac{3}{x})^7$ 展开式中， $\frac{1}{x}$ 项的系数为 ()

- A. $-\frac{945}{16}$ B. $-\frac{189}{32}$ C. $-\frac{21}{64}$ D. $\frac{2835}{8}$

5. 函数 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$)，当 $x \in [0, \pi]$ 时， $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$ ，则 ω 的范围为 ()

- A. $[\frac{5}{6}, \frac{3}{2}]$ B. $[\frac{5}{6}, \frac{5}{3}]$ C. $[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$ D. $(0, \frac{5}{3}]$

6. 某四棱锥的三视图如图所示，记 S 为此棱锥所有棱的长度的集合，则 ()



A. $2\sqrt{2} \notin S$, 且 $2\sqrt{3} \notin S$

B. $2\sqrt{2} \notin S$, 且 $2\sqrt{3} \in S$

C. $2\sqrt{2} \in S$, 且 $2\sqrt{3} \notin S$

D. $2\sqrt{2} \in S$, 且 $2\sqrt{3} \in S$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 设 $c_n = a_{b_n}$,

$T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则当 $T_n < 2020$ 时, n 的最大值是 ()

A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

8. 下列函数中, 值域为 R 的偶函数是 ()

A. $y = x^2 + 1$ B. $y = e^x - e^{-x}$ C. $y = \lg|x|$ D. $y = \sqrt{x^2}$

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $AC = 3$, $\angle A = 60^\circ$, O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 若 $\vec{AO} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, $x, y \in R$, 则

$2x + 3y =$ ()

A. 2 B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

10. 已知点 $M(2, 0)$, 点 P 在曲线 $y^2 = 4x$ 上运动, 点 F 为抛物线的焦点, 则 $\frac{|PM|^2}{|PF| - 1}$ 的最小值为 ()

A. $\sqrt{3}$ B. $2(\sqrt{5} - 1)$ C. $4\sqrt{5}$ D. 4

11. 设正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_6 - 2S_3 = 2$, 则 $\frac{3a_8^2}{a_2}$ 的最小值为

A. 8 B. 16 C. 24 D. 36

12. 若样本 $1 + x_1, 1 + x_2, 1 + x_3, \dots, 1 + x_n$ 的平均数是 10, 方差为 2, 则对于样本 $2 + 2x_1, 2 + 2x_2, 2 + 2x_3, \dots, 2 + 2x_n$, 下列

结论正确的是 ()

A. 平均数为 20, 方差为 4 B. 平均数为 11, 方差为 4

C. 平均数为 21, 方差为 8 D. 平均数为 20, 方差为 8

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知关于 x 的方程 $a|\sin x| + \frac{1}{2} = \sin x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上恰有两个解, 则实数 a 的取值范围是_____

14. 已知集合 $A = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x(x - 5) < 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

15. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 2x+1, \\ 2x+y \leq 4, \\ y+2 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = x - 2y$ 的最大值为_____.

16. 若 $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - a\sqrt{x_0^2 + 1} + 5 < 0$ 为假, 则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{(x^2 + ax - a)}{e^x}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 的切线方程;

(2) 求证: $f(x)$ 的极大值恒大于 0.

18. (12 分) 已知圆 $O_1: (x+1)^2 + y^2 = 8$ 上有一动点 Q , 点 O_2 的坐标为 $(1, 0)$, 四边形 QO_1O_2R 为平行四边形, 线段 O_1R 的垂直平分线交 O_2R 于点 P .

(I) 求点 P 的轨迹 C 的方程;

(II) 过点 O_2 作直线与曲线 C 交于 A, B 两点, 点 K 的坐标为 $(2, 1)$, 直线 KA, KB 与 y 轴分别交于 M, N 两点, 求证: 线段 MN 的中点为定点, 并求出 $\triangle KMN$ 面积的最大值.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + (t-2)x - t \ln x + 2$.

(1) 若 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 $f(x)$ 的极大值;

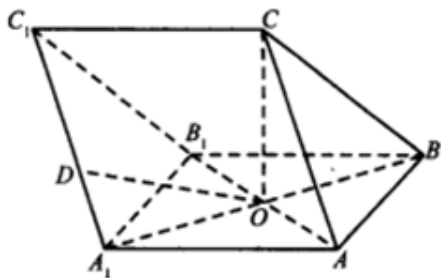
(2) 求实数 t 的范围, 使得 $f(x) \geq 2$ 恒成立.

20. (12 分) 已知 AB 是圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 的直径, 动圆 M 过 A, B 两点, 且与直线 $y+2=0$ 相切.

(1) 若直线 AB 的方程为 $x-y=0$, 求 $\odot M$ 的方程;

(2) 在 y 轴上是否存在一个定点 P , 使得以 MP 为直径的圆恰好与 x 轴相切? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

21. (12 分) 如图所示, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 为等边三角形, $\angle BAB_1 = \angle BB_1A$, $AB_1 \cap A_1B = O$, $CO \perp$ 平面 ABB_1A_1 , D 是线段 A_1C_1 上靠近 A_1 的三等分点.



(1) 求证: $AB \perp AA_1$;

(2) 求直线 OD 与平面 A_1ACC_1 所成角的正弦值.

22. (10 分) 已知椭圆 C 的短轴的两个端点分别为 $A(0,1)$ 、 $B(0,-1)$, 焦距为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知直线 $y = m$ 与椭圆 C 有两个不同的交点 M 、 N , 设 D 为直线 AN 上一点, 且直线 BD 、 BM 的斜率的积为 $-\frac{1}{4}$. 证明: 点 D 在 x 轴上.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

讨论 $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$ 三种情况, 求导得到单调区间, 画出函数图像, 根据图像得到答案.

【详解】

当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$, 故 $f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}e^x}$, 函数在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减, 且

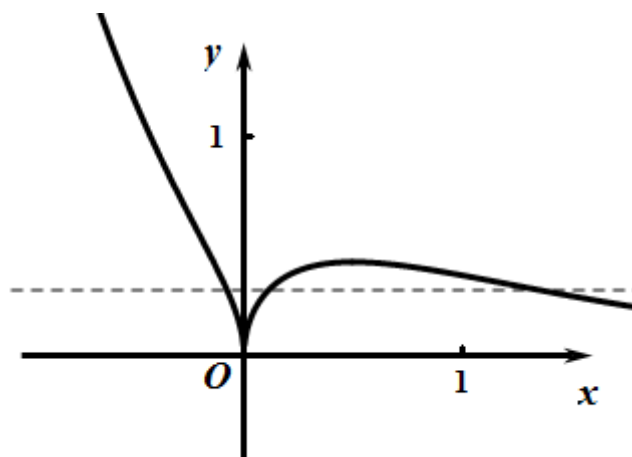
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2e}}{2e};$$

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$;

当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{e^x}$, $f'(x) = -\frac{1-2x}{2\sqrt{-x}e^x} < 0$, 函数单调递减;

如图所示画出函数图像, 则 $0 < m-1 < f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2e}}{2e}$, 故 $m \in \left(1, \frac{\sqrt{2e}}{2e} + 1\right)$.

故选: D.



【点睛】

本题考查了利用导数求函数的零点问题，意在考查学生的计算能力和应用能力.

2、C

【解析】

依次判断函数的值域和奇偶性得到答案.

【详解】

A. $y = x + 2$ ，值域为 R ，非奇非偶函数，排除；

B. $y = \sin x$ ，值域为 $[-1, 1]$ ，奇函数，排除；

C. $y = x - x^3$ ，值域为 R ，奇函数，满足；

D. $y = 2^x$ ，值域为 $(0, +\infty)$ ，非奇非偶函数，排除；

故选：C.

【点睛】

本题考查了函数的值域和奇偶性，意在考查学生对于函数知识的综合应用.

3、B

【解析】

根据复数的除法运算法则和共轭复数的定义直接求解即可.

【详解】

由 $(1 + 2i)z = 4 + 3i$ ，得 $z = \frac{4 + 3i}{1 + 2i} = 2 - i$ ，所以 $\bar{z} = 2 + i$.

故选：B

【点睛】

本题考查了复数的除法的运算法则，考查了复数的共轭复数的定义，属于基础题.

4、D

【解析】

写出二项式的通项公式,再分析 x 的系数求解即可.

【详解】

二项式 $\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right)^7$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_7^r\left(\frac{x}{2}\right)^{7-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r=C_7^r\left(\frac{1}{2}\right)^{7-r}(-3)^r x^{7-2r}$,令 $7-2r=-1$,得 $r=4$,故 $\frac{1}{x}$ 项的系数为 $C_7^4\left(\frac{1}{2}\right)^{7-4}(-3)^4=\frac{2835}{8}$.

故选: D

【点睛】

本题主要考查了二项式定理的运算,属于基础题.

5、B

【解析】

首先由 $x\in[0,\pi]$,可得 $\omega x-\frac{\pi}{3}$ 的范围,结合函数 $f(x)$ 的值域和正弦函数的图像,可求的关于实数 ω 的不等式,解不等式即可求得范围.

【详解】

因为 $x\in[0,\pi]$,所以 $\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\omega\pi-\frac{\pi}{3}\right]$,若值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,

所以只需 $\frac{\pi}{2}\leq\omega\pi-\frac{\pi}{3}\leq\frac{4\pi}{3}$, $\therefore\frac{5}{6}\leq\omega\leq\frac{5}{3}$.

故选: B

【点睛】

本题主要考查三角函数的值域,熟悉正弦函数的单调性和特殊角的三角函数值是解题的关键,侧重考查数学抽象和数学运算的核心素养.

6、D

【解析】

如图所示:在边长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,四棱锥 C_1-ABCD 满足条件,故 $S=\{2,2\sqrt{2},2\sqrt{3}\}$,得到答案.

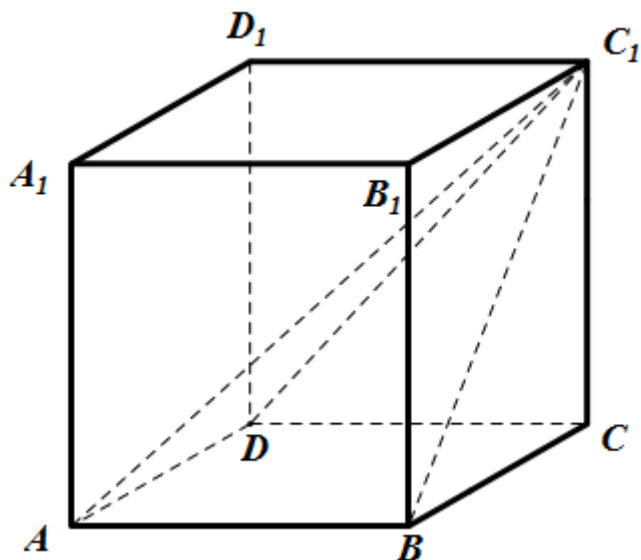
【详解】

如图所示:在边长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,四棱锥 C_1-ABCD 满足条件.

故 $AB=BC=CD=AD=CC_1=2$, $BC_1=DC_1=2\sqrt{2}$, $AC_1=2\sqrt{3}$.

故 $S=\{2, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}\}$, 故 $2\sqrt{2} \in S$, $2\sqrt{3} \in S$.

故选: D.



【点睛】

本题考查了三视图, 元素和集合的关系, 意在考查学生的空间想象能力和计算能力.

7、B

【解析】

根据题意计算 $a_n = 2n - 1$, $b_n = 2^{n-1}$, $T_n = 2^{n+1} - n - 2$, 解不等式得到答案.

【详解】

$\because \{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, $\therefore a_n = 2n - 1$.

$\because \{b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, $\therefore b_n = 2^{n-1}$.

$\therefore T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = a_{b_1} + a_{b_2} + \dots + a_{b_n} = a_1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2^{n-1}}$

$= (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + (2 \times 4 - 1) + \dots + (2 \times 2^{n-1} - 1) = 2(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}) - n = 2 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} - n = 2^{n+1} - n - 2$.

$\because T_n < 2020$, $\therefore 2^{n+1} - n - 2 < 2020$, 解得 $n \leq 9$. 则当 $T_n < 2020$ 时, n 的最大值是 9.

故选: B.

【点睛】

本题考查了等差数列, 等比数列, f 分组求和, 意在考查学生对于数列公式方法的灵活运用.

8、C

【解析】

试题分析：A 中，函数为偶函数，但 $y \geq 1$ ，不满足条件；B 中，函数为奇函数，不满足条件；C 中，函数为偶函数且 $y \in R$ ，满足条件；D 中，函数为偶函数，但 $y \geq 0$ ，不满足条件，故选 C.

考点：1、函数的奇偶性；2、函数的值域.

9、B

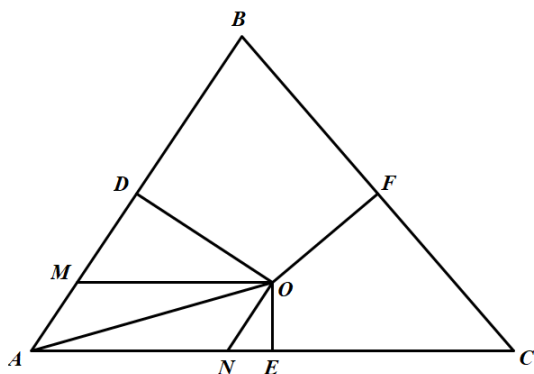
【解析】

首先根据题中条件和三角形中几何关系求出 x ， y ，即可求出 $2x+3y$ 的值.

【详解】

如图所示过 O 做三角形三边的垂线，垂足分别为 D ， E ， F ，

过 O 分别做 AB ， AC 的平行线 NO ， MO ，



$$\text{由题知 } \cos 60^\circ = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{9 + 4 + BC^2}{12} \Rightarrow BC = \sqrt{7},$$

$$\text{则外接圆半径 } r = \frac{BC}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{21}}{3},$$

$$\text{因为 } OD \perp AB, \text{ 所以 } OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{21}{9} - 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{又因为 } \angle DMO = 60^\circ, \text{ 所以 } DM = \frac{2}{3} \Rightarrow AM = \frac{1}{3}, \quad MO = AN = \frac{4}{3},$$

$$\text{由题可知 } \overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN},$$

$$\text{所以 } x = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{6}, \quad y = \frac{AN}{AC} = \frac{4}{9},$$

所以 $2x+3y=\frac{5}{3}$.

故选：D.

【点睛】

本题主要考查了三角形外心的性质，正弦定理，平面向量分解定理，属于一般题.

10、D

【解析】

如图所示：过点 P 作 PN 垂直准线于 N ，交 y 轴于 Q ，则 $|PF|-1=|PN|-1=|PQ|$ ，设 $P(x,y)$ ， $x>0$ ，则

$$\frac{|PM|^2}{|PF|-1}=x+\frac{4}{x}，\text{利用均值不等式得到答案.}$$

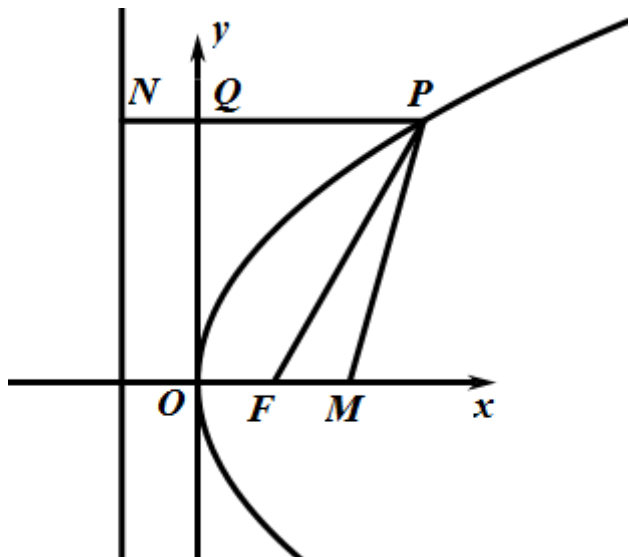
【详解】

如图所示：过点 P 作 PN 垂直准线于 N ，交 y 轴于 Q ，则 $|PF|-1=|PN|-1=|PQ|$ ，

$$\text{设 } P(x,y)，x>0，\text{ 则 } \frac{|PM|^2}{|PF|-1}=\frac{|PM|^2}{|PQ|}=\frac{(x-2)^2+y^2}{x}=\frac{(x-2)^2+4x}{x}=x+\frac{4}{x}\geq 4，$$

当 $x=\frac{4}{x}$ ，即 $x=2$ 时等号成立.

故选：D.



【点睛】

本题考查了抛物线中距离的最值问题，意在考查学生的计算能力和转化能力.

11、B

【解析】

方法一：由题意得 $S_6-2S_3=(S_6-S_3)-S_3=2$ ，根据等差数列的性质，得 S_9-S_6, S_6-S_3, S_3 成等差数列，设

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/996010225232011003>