

甘肃省兰州市西北师范大学附属中学 2024-2025 学年高二下学

期第一次月考数学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 且 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2025$, 则 $f'(x_0) = ()$

- A. -2025 B. 0 C. 1 D. 2025

2. 已知函数 $f(x) = ae^{x-1} + \ln x$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x - 2y - 3 = 0$ 垂直, 则实数 a 的值为 $()$

- A. $-\frac{3}{2}$ B. -2 C. -3 D. 1

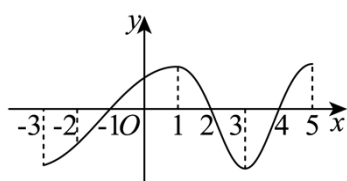
3. 由 3 名医生和 6 名护士组成的一支医疗小队下乡送医扶助新农村建设, 他们要全部分配到三个农村医疗点, 每个医疗点分到 1 名医生和护士 1 至 3 名, 其中护士甲和护士乙必须分到同一个医疗点, 则不同的分配方法有 $()$ 种

- A. 540 B. 684 C. 756 D. 792

4. 若 $a = \frac{2\sqrt{2}}{\ln 2\sqrt{2}}, b = \frac{2}{\ln 2}, c = \frac{3}{\ln 3}$, 则 $()$

- A. $c < b < a$ B. $c < a < b$
C. $a < c < b$ D. $b < a < c$

5. 已知 $[-3, 5]$ 上的可导函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则不等式 $(x-2)f'(x) > 0$ 的解集为 $()$



- A. $(-3, -1) \cup (4, 5)$ B. $(1, 2) \cup (4, 5)$
C. $(1, 2) \cup (3, 5)$ D. $(-1, 1) \cup (2, 3)$

6. 已知函数 $f(x) = \ln x + (x-b)^2$ ($b \in \mathbf{R}$) 在 $[1, 2]$ 上存在单调递减区间, 则实数 b 的取值范围是 $()$

- A. $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{9}{4}, +\infty\right)$ C. $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ D. $\left(\frac{9}{4}, +\infty\right)$

7. 已知 $f(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的可导函数, 且 $(x+1) \cdot f'(x) > f(x)$, 则下列不等式一定成立的是 ()

- A. $3f(4) < 4f(3)$ B. $4f(4) < 5f(3)$
C. $3f(3) < 4f(2)$ D. $3f(3) > 4f(2)$

8. 已知对任意的正数 x , 不等式 $e^x + \frac{1}{e} \geq \left(a + \frac{1}{ex}\right)(\ln a + \ln x)$ 恒成立, 则正数 a 的最大值为 ()

- A. e B. $\frac{1}{e}$ C. $e + \frac{1}{e}$ D. 1

二、多选题

9. 已知 $\left(mx^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ (常数 $m > 0$) 的展开式中第 5 项与第 7 项的二项式系数相等, 则 ()

- A. $n = 10$
B. 展开式中奇数项的二项式系数的和为 256
C. 展开式中 x^{15} 的系数为 $45m^8$
D. 若展开式中各项系数的和为 1024, 则第 6 项的系数最大

10. 已知 $(2x-5)^{2025} = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + \dots + a_{2025}(x-2)^{2025}$, 则下列结论成立的是 ()

A. $a_0 + a_1 + \dots + a_{2025} = 1$

B.

$$2^{2024}a_0 + 2^{2023}a_1 + \dots + 2a_{2023} + a_{2024} = 5 \times 10^{2024}$$

C. $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{2025} = 3^{2025}$

D. $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 2025a_{2025} = 4050$

11. 已知函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$ ($a \in \mathbf{R}$), 则下列结论正确的是 ()

A. 当 $a = -3$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

B. 函数 $f(x)$ 可能有极大值, 也可能有极小值

C. 若函数 $f(x)$ 存在唯一的极值点 x_0 , 且 $x_0 > 1$, 则 $a \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$

D. 当 $a \in \left(\frac{1}{e}, \frac{4}{\sqrt{e}}\right)$, $f(x)$ 的极大值 $f(x_0)$ 的范围是 $(0, 2 - \ln 2)$

三、填空题

12. $\left(4x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^9$ 的展开式中的常数项为_____.

13. 若函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 6x - 3$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在极值, 则正整数 a 的最小值为_____.

14. 已知函数 $f(x) = \ln x + x - ax^2$ 有两个零点, 则实数 a 的取值范围为_____.

四、解答题

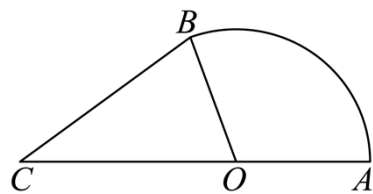
15. 已知曲线 $C_1: y = \ln x + 2$ 和曲线 $C_2: y = \ln(x+2)$.

(1) 若 P 为曲线 C_1 上的一动点, 当点 P 到直线 $y = ex + 2$ 的距离最小时, 求点 P 的坐标;

(2) 若直线 l 既是曲线 C_1 的切线, 也是曲线 C_2 的切线, 求直线 l 的方程.

16. 广告公司为某游乐场设计某项设施的宣传画, 根据该设施的外观, 设计成的平面图由半径为 2 m 的扇形 AOB 和三角区域 BCO 构成, 其中 C, O, A 在一条直线上, $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$, 记该

设施平面图的面积为 $S(x)\text{m}^2$, $\angle AOB = x \text{ rad}$, 其中 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.



(1) 写出 $S(x)$ 关于 x 的函数关系式;

(2) 如何设计 $\angle AOB$, 使得 $S(x)$ 有最大值?

17. 已知函数 $f(x) = a \ln x - \frac{1}{2}x^2$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的极值点;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(3) 若函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上恒小于 0, 求 a 的取值范围.

18. 设函数 $f(x) = e^{x+1} - x^2 - kx$.

(1) 若 $f(x)$ 在区间 $[-1, +\infty)$ 上单调递增, 求 k 的取值范围;

(2) 当 $k = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, 1)$ 处的切线方程;

(3) 当 $x \geq -1$ 时, $f(x) \geq f(-1)$, 求 k 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$, $g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{x^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 证明: $f(x) \geq 0$.

(2) 讨论函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的零点个数.

(3) 当 $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$ 时, 证明: $\forall x > 0$, $g(x) > 1 - \ln 2$.

《甘肃省兰州市西北师范大学附属中学 2024-2025 学年高二下学期第一次月考数学试题》

参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	B	C	C	C	D	A	ACD	AD
题号	11									
答案	ACD									

1. A

【分析】由导数的定义得 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} = -2025$.

【详解】因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2025$,

所以由导数的定义可知 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -2025$,

故选：A.

2. C

【分析】先根据求导公式求出函数 $f(x)$ 的导数，进而得到函数在点 $(1, f(1))$ 处切线的斜率，再根据两直线垂直斜率之积为 -1 求出实数 a 的值.

【详解】对 $f(x) = ae^{x-1} + \ln x$ 求导可得： $f'(x) = ae^{x-1} + \frac{1}{x}$.

可得切线的斜率 $k = f'(1) = ae^{1-1} + \frac{1}{1} = a + 1$.

将直线 $x - 2y - 3 = 0$ 转化为斜截式 $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ ，可知直线斜率 $k_1 = \frac{1}{2}$.

因为函数 $f(x)$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x - 2y - 3 = 0$ 垂直，

根据两直线垂直斜率之积为 -1 ，可得 $k \times k_1 = -1$ ，即 $(a + 1) \times \frac{1}{2} = -1$.

可得： $a + 1 = -2$ ，

故 $a = -3$ ，即实数 a 的值为 -3 .

故选：C.

3. B

【分析】首先分步：先安排医生，再安排护士，其次特殊元素护士甲和护士乙捆绑，即护士 6 名可分为 2,2,2 和 2,1,3 两类，应用分类和分步计数原理可得总的分配方法.

【详解】先安排医生，再安排护士.

安排医生，方法数有 $A_3^3 = 6$ 种；

再安排护士，护士 6 名，由于护士甲和护士乙必须分到同一个医疗点，故可分为 2,2,2 和 2,1,3

两类:

如果是2,2,2, 一共有 $\frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2} = 3$ 种,

如果是2,1,3, 又分为若甲乙在2人小组中, 则有 $C_4^1 = 4$ 种;

若甲乙在3人小组中, 则有 $C_4^2 C_2^1 = 12$ 种,

最后将分好的三组医生、三组护士全排列安排到三个医疗点,

所以一共有 $\left(\frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2} + C_4^1 + C_4^2 C_2^1 \right) A_3^3 A_3^3 = (3 + 4 + 12) \times 6 \times 6 = 684$ 种分配方法.

故选: B.

4. C

【分析】根据题意可通过构造函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ($x > 0$ 且 $x \neq 1$), 利用导数求出其单调性, 即可

比较得出各数的大小.

【详解】因为 $a = \frac{2\sqrt{2}}{\ln 2\sqrt{2}}, b = \frac{2}{\ln 2}, c = \frac{3}{\ln 3}$, 所以构造函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ($x > 0$ 且 $x \neq 1$),

则 $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

当 $x \in (1, e)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减;

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增;

综上所述, $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ 在 $(0, 1)$ 与 $(1, e)$ 上单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $b = \frac{2}{\ln 2} = \frac{4}{\ln 4} = f(4) > f(3) = \frac{3}{\ln 3} = c$.

又因为 $e < 2\sqrt{2} < 3$, 所以 $c = \frac{3}{\ln 3} = f(3) > f(2\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{\ln 2\sqrt{2}} = a$,

可得 $a < c < b$.

故选: C.

5. C

【分析】由函数图象得出 $f'(x) > 0$ 和 $f'(x) < 0$ 的解, 然后用分类讨论思想求得结论.

【详解】由图象知 $f'(x) > 0$ 的解集为 $(-3, 1) \cup (3, 5)$, $f'(x) < 0$ 的解集为 $(1, 3)$,

$$(x-2)f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-2 < 0 \\ f'(x) < 0 \end{cases},$$

所以 $3 < x < 5$ 或 $1 < x < 2$, 解集即为 $(1, 2) \cup (3, 5)$.

故选: C

6. C

【分析】根据题意可知 $f'(x) < 0$ 在 $[1, 2]$ 上有解, 整理可得 $b > \left(\frac{1}{2x} + x\right)_{\min}, x \in [1, 2]$, 构建

$g(x) = \frac{1}{2x} + x, x \in [1, 2]$, 利用导数求最值即可得结果.

【详解】由题意可知: $f'(x) = \frac{1}{x} + 2(x-b) = \frac{1}{x} + 2x - 2b$,

因为函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上存在单调递减区间,

则 $f'(x) < 0$ 在 $[1, 2]$ 上有解, 可得 $b > \frac{1}{2x} + x$,

所以 $b > \left(\frac{1}{2x} + x\right)_{\min}, x \in [1, 2]$.

令 $g(x) = \frac{1}{2x} + x, x \in [1, 2]$, 则 $g'(x) = -\frac{1}{2x^2} + 1$,

显然 $g'(x) > 0$, 可知函数 $g(x)$ 单调递增, 则 $g(x)_{\min} = g(1) = \frac{3}{2}$,

即 $b > \frac{3}{2}$, 所以实数 b 的取值范围是 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

故选: C.

7. D

【分析】先构造函数 $h(x) = \frac{f(x)}{x+1}$, 利用导数判断该函数的单调性; 再利用单调性判断各个选项即可.

【详解】设 $h(x) = \frac{f(x)}{x+1}, x \in (0, +\infty)$, 则 $h'(x) = \frac{(x+1)f'(x) - f(x)}{(x+1)^2}$,

因为 $(x+1)f'(x) > f(x)$, 所以 $(x+1)f'(x) - f(x) > 0$,

得到 $h'(x) > 0$, 则函数 $h(x) = \frac{f(x)}{x+1}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(4) > h(3)$, 即 $\frac{f(4)}{5} > \frac{f(3)}{4}$, 则 $4f(4) > 5f(3)$, 故 B 错误,

而 $h(3) > h(2)$, $\frac{f(3)}{4} > \frac{f(2)}{3}$, 得到 $3f(3) > 4f(2)$, 故 C 错误, D 正确,

而依据已知条件无法确定 A, 故 A 错误.

故选: D.

8. A

【分析】利用不等式两边同构函数, 设 $g(x) = xe^{x+1} + x$, 从而转化问题为 $g(x) \geq g(\ln(ax))$

恒成立, 进而结合导数分析函数 $g(x)$ 的单调性得到 $x \geq \ln ax$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 进而得

到 $a \leq \frac{e^x}{x}$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 即 $a \leq \left(\frac{e^x}{x}\right)_{\min}$, 再构造函数 $h(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, 进而结

合导数求解即可.

【详解】由 $e^x + \frac{1}{e} \geq \left(a + \frac{1}{ex}\right)(\ln a + \ln x)$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 且 $a > 0$,

即 $e^x + \frac{1}{e} \geq a \ln ax + \frac{1}{ex} \ln ax \Rightarrow e \cdot e^x x + x \geq e \cdot ax \ln ax + \ln ax$ 恒成立,

即 $e \cdot e^x x + x \geq e \cdot e^{\ln ax} \ln ax + \ln ax$ 恒成立,

设 $g(x) = ee^x x + x = e^{x+1} x + x$, 则 $g'(x) = (x+1)e^{x+1} + 1$,

因为 $x > 0$, 即 $g'(x) = (x+1)e^{x+1} + 1 > 0$,

即函数 $g(x) = xe^{x+1} + x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

则由 $e \cdot e^x x + x \geq e \cdot e^{\ln ax} \ln ax + \ln ax$ 恒成立,

可以转化为 $g(x) \geq g(\ln(ax))$ 恒成立,

即 $x \geq \ln ax$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

即 $a \leq \frac{e^x}{x}$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 即 $a \leq \left(\frac{e^x}{x}\right)_{\min}$.

设 $h(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$,

令 $h'(x) < 0$, 即 $0 < x < 1$; 令 $h'(x) > 0$, 即 $x > 1$,

所以函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x)_{\min} = h(1) = e$, 即 $a \leq e$,

又 $a > 0$, 所以实数 a 的取值范围为 $(0, e]$.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：解答本题的关键是观察原不等式的特点，利用同构函数思想，将问题转化为 $g(x) \geq g(\ln(ax))$ 恒成立，再结合导数进行求解即可.

9. ACD

【分析】由题意写出展开式的通项，根据组合数的对称性、二项式系数之和、赋值法以及二项式系数的单调性，逐项检验，可得答案.

【详解】由 $\left(mx^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ ，则其展开式的通项为 $T_{r+1} = C_n^r (mx^2)^{n-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = m^{n-r} C_n^r x^{\frac{4n-5r}{2}}$ ，

对于 A，根据题意可得 $C_n^4 = C_n^6$ ，由组合数的性质可知 $n=10$ ，故 A 正确；

对于 B，由 $\left(mx^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ ，则展开式中奇数项的二项式系数之和为 $2^{10-1} = 512$ ，故 B 错误；

对于 C，由 $\frac{4 \times 10 - 5r}{2} = 15$ 解得 $r=2$ ，则展开式中 x^{15} 的系数为 $m^{10-2} C_{10}^2 = 45m^8$ ，故 C 正确；

对于 D，令 $x=1$ ，则展开式中各项系数之和 $(m+1)^{10} = 1024 = 2^{10}$ ，解得 $m=1$ ，

可得展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{10}^r x^{\frac{40-5r}{2}}$ ，即每项系数均为该项的二项式系数，

易知展开式中第 6 项为二项式 $\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ 的中间项，则其系数最大，故 D 正确.

故选：ACD.

10. AD

【分析】应用赋值法及换元法分别判断 A，B，C 选项；等式两侧同时求导函数及赋值可判断 D 选项.

【详解】A. 令 $x=3$ ，得 $1^{2025} = a_0 + a_1 + \dots + a_{2025}$ ，即 $a_0 + a_1 + \dots + a_{2025} = 1$ ，A 正确.

B. 令 $x-2=t$ ，则原等式变形为 $(2t-1)^{2025} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{2025} t^{2025}$ ，

由二项式定理得， $a_{2025} = C_{2025}^0 2^{2025} = 2^{2025}$ ，

令 $t = \frac{1}{2}$ ，得 $0 = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{2024}}{2^{2024}} + \frac{a_{2025}}{2^{2025}}$ ，

等式两侧同乘 2^{2024} ，得 $2^{2024} a_0 + 2^{2023} a_1 + \dots + 2a_{2023} + a_{2024} + \frac{a_{2025}}{2} = 0$ ，

$\therefore 2^{2024} a_0 + 2^{2023} a_1 + \dots + 2a_{2023} + a_{2024} = -\frac{a_{2025}}{2} = -2^{2024}$ ，B 错误.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/996055040030011105>