

2023 年高考数学复习——大题狂练：不等式（15 题）

一. 解答题（共 15 小题）

1. （2022 秋•余姚市校级月考）求下列不等式的解集：

(1) $-x^2+4x-3 > (x-1)^2$;

(2) $(x-a)[x-(1-a)] < 0$ ($a > 0$).

2. （2022•北关区校级开学）设 $2 < a < 7$, $1 < b < 2$, 求 $a+3b$, $2a-b$, $\frac{a}{b}$ 的范围.

3. （2022•南京模拟）比较 $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}$ 与 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ($a > 0$, $b > 0$) 的大小.

4. （2022•南京模拟）解关于 x 的不等式 $\frac{1-x}{x-5} > 0$.

5. (2022•南京模拟) 解关于 x 的不等式 $\frac{2x-3}{3x-4} \leq 2$.

6. (2022•南京模拟) 讨论 $\frac{1}{1-a}$ 与 $1+a$ 的大小.

7. (2022•南京模拟) 函数 $y = \frac{3x}{x^2+x+1}$ 过 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 两点, 且 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 试比较 y_1 与 y_2 的大小.

8. (2022•南京模拟) 已知 $a > 0$, $b > 0$, $a+2b=1$, 求 $\frac{1}{3a+4b} + \frac{1}{a+3b}$ 的最小值.

9. (2022 春•河西区校级期末) 已知函数 $f(x) = ax^2 + (b-2)x + 3$ ($a \neq 0$).

(I) 若不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-1, 1)$, 求 a, b 的值;

(II) 若 $f(1) = 2$.

(i) $a > 0, b > 0$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值;

(ii) 若不等式 $f(x) < 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解集为空集, 求实数 a 的取值范围.

10. (2022 春•青铜峡市校级期末) (1) 已知 $x > 3$, 求 $\frac{4}{x-3} + x$ 的最小值;

(2) 已知 x, y 是正实数, 且 $x+y=1$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ 的最小值.

11. (2022•南京模拟) 解以下一元二次不等式

(1) $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$

(2) $-x^2 - 5x + 6 < 0$

(3) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

(4) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

12. (2022•南京模拟) 解不等式 $(x-a)(x-a-1) > 0$

13. (2022•南京模拟) 在 $-2 \leq x < 4$ 内存在 x , 使得不等式 $-2x^2 - 4x + 3 \leq a$ 成立, 求 a 的取值范围.

14. (2022•南京模拟) 关于 x 的方程 $-x^2 + 3x - m = 3 - x$ 的实数根中, 恰有一个正数解满足不等式 $3 - x > 0$, 求实数 m 的取值范围.

15. (2022•南京模拟) 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) - f(x) = 2x - 1$, 且 $f(1) = -4$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 当 $x \in [-2, 2]$ 时, 不等式 $f(x) > 4x + m$ 恒成立; 求实数 m 的取值范围;

(3) 设 $h(m) = f(2m+a)$, $m \in [-3, 3]$ 求 $h(m)$ 的最大值.

2023 年高考数学复习——大题狂练：不等式（15 题）

参考答案与试题解析

一. 解答题（共 15 小题）

1. （2022 秋•余姚市校级月考）求下列不等式的解集：

（1） $-x^2+4x-3 > (x-1)^2$;

（2） $(x-a)[x-(1-a)] < 0$ ($a > 0$).

【考点】其他不等式的解法.

【专题】计算题；函数思想；综合法；不等式的解法及应用；数学运算.

【分析】（1）原不等式可化为 $(x-1)(x-2) < 0$ ，从而求出解集.

（2）分 $a < 1-a$ ， $a = 1-a$ ， $a > 1-a$ 三种情况讨论，分别求出解集.

【解答】解：（1）不等式 $-x^2+4x-3 > (x-1)^2$ ，可化为 $x^2-3x+2 < 0$ ，

因式分解得： $(x-1)(x-2) < 0$ ，

所以 $1 < x < 2$ ，

即不等式的解集为 $\{x | 1 < x < 2\}$;

（2）①当 $a < 1-a$ ，即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时，解得 $a < x < 1-a$ ，

②当 $a = 1-a$ ，即 $a = \frac{1}{2}$ 时，无解，

③当 $a > 1-a$ ，即 $a > \frac{1}{2}$ 时，解得 $1-a < x < a$ ，

综上所述，当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时，解集为 $\{x | a < x < 1-a\}$ ；当 $a > \frac{1}{2}$ 时，解集为 $\{x | 1-a < x < a\}$ ；当 $a = \frac{1}{2}$ 时，解集为 $\emptyset$.

【点评】本题主要考查了一元二次不等式的解法，考查了分类讨论的数学思想，属于基础题.

2. （2022•北关区校级开学）设 $2 < a < 7$ ， $1 < b < 2$ ，求 $a+3b$ ， $2a-b$ ， $\frac{a}{b}$ 的范围.

【考点】等式与不等式的性质.

【专题】整体思想；综合法；不等式的解法及应用；数学抽象.

【分析】由已知结合不等式的性质即可求解.

【解答】解： $\because 2 < a < 7$ ， $1 < b < 2$ ，

$$\therefore 4 < 2a < 14, \quad 3 < 3b < 6, \quad -2 < -b < -1, \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{b} < 1,$$

$$\therefore 5 < a+3b < 13, \quad 2 < 2a-b < 13,$$

$$\therefore 1 < \frac{a}{b} < 7.$$

$$\text{故 } 5 < a+3b < 13, \quad 2 < 2a-b < 13, \quad 1 < \frac{a}{b} < 7.$$

【点评】 本题主要考查了不等式的性质，属于基础题.

3. (2022•南京模拟) 比较 $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}$ 与 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ($a > 0, b > 0$) 的大小.

【考点】 不等式比较大小.

【专题】 对应思想；转化法；不等式的解法及应用；数学运算.

【分析】 做差化简，分情况讨论比较大小.

$$\begin{aligned} \text{【解答】 解: } & \left(\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \right) - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\ &= \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} - \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} \\ &= \frac{a(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - b(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a-b)}{\sqrt{ab}} \\ &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}. \end{aligned}$$

$$\because a > 0, \quad b > 0,$$

$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0, \quad \sqrt{ab} > 0,$$

$$\text{又 } \because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad (\text{当且仅当 } a=b \text{ 时等号成立}),$$

$$\therefore \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}} \geq 0,$$

$$\text{即 } \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (\text{当且仅当 } a=b \text{ 时等号成立}).$$

【点评】 本题考查通过作差法比较不等式的大小，属于基础题.

4. (2022•南京模拟) 解关于 x 的不等式 $\frac{1-x}{x-5} > 0$.

【考点】 其他不等式的解法.

【专题】 整体思想；综合法；不等式的解法及应用；数学运算.

【分析】 $\frac{x-1}{x-5} < 0$ 等价转化为 $(x-1)(x-5) < 0$ ，即可求解

【解答】解： $\frac{1-x}{x-5} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-5} < 0$ ，等价转化为 $(x-1)(x-5) < 0$ ，

解得 $1 < x < 5$

所以不等式的解集为 $\{x | 1 < x < 5\}$ 。

【点评】本题主要考查了分式不等式的求解，属于基础题。

5. (2022•南京模拟) 解关于 x 的不等式 $\frac{2x-3}{3x-4} \leq 2$ 。

【考点】其他不等式的解法。

【专题】整体思想；综合法；不等式的解法及应用；数学运算。

【分析】将分式不等式转化为一元二次不等式即可求解

【解 答 解 析】：

$$\frac{2x-3}{3x-4} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{3x-4} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-4x+5}{3x-4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-5}{3x-4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (4x-5)(3x-4) \geq 0 \\ 3x-4 \neq 0 \end{cases}$$

解得 $x > \frac{4}{3}$ 或 $x \leq \frac{5}{4}$ ，

所以不等式 $\frac{2x-3}{3x-4} \leq 2$ 的解集为 $\{x | x > \frac{4}{3} \text{ 或 } x \leq \frac{5}{4}\}$ ，

【点评】本题主要考查了分式不等式的求解，属于基础题。

6. (2022•南京模拟) 讨论 $\frac{1}{1-a}$ 与 $1+a$ 的大小。

【考点】不等式比较大小。

【专题】转化思想；定义法；不等式；数学运算。

【分析】作差，通分化简，再将差值与 0 比较，分大于 0，等于 0，小于 0 三种情况讨论，即可得出结论。

【解答】解： $1+a - \frac{1}{1-a} = \frac{(1+a)(1-a) - 1}{1-a} = \frac{-a^2}{1-a} = \frac{a^2}{a-1}$ ，

当 $a > 1$ 时， $\frac{a^2}{a-1} > 0$ ，即 $1+a > \frac{1}{1-a}$ ；

当 $a = 0$ 时， $\frac{a^2}{a-1} = 0$ ，即 $1+a = \frac{1}{1-a}$ ；

当 $a < 1$ 且 $a \neq 0$ 时， $\frac{a^2}{a-1} < 0$ ，即 $\frac{1}{1-a} > 1+a$ 。

【点评】本题考查两个代数式大小的判断，考查作差法、分类讨论思想等基础知识，考查运算求解能力，是基础题。

7. (2022•南京模拟) 函数 $y = \frac{3x}{x^2+x+1}$ 过 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) 两点，且 $0 < x_1 < x_2 < 1$ ，试比

较 y_1 与 y_2 的大小。

【考点】不等式比较大小.

【专题】转化思想；定义法；不等式；数学运算.

【分析】利用作差法比较即可.

【解答】解：
$$y_1 - y_2 = \frac{3x_1}{x_1^2 + x_1 + 1} - \frac{3x_2}{x_2^2 + x_2 + 1} = \frac{3x_1(x_2^2 + x_2 + 1) - 3x_2(x_1^2 + x_1 + 1)}{(x_1^2 + x_1 + 1)(x_2^2 + x_2 + 1)}$$

=

$$\frac{(3x_1x_2^2 - 3x_2x_1^2) + (3x_1x_2 - 3x_2x_1) + (3x_1 - 3x_2)}{(x_1^2 + x_1 + 1)(x_2^2 + x_2 + 1)} = \frac{3(x_2 - x_1)(x_1x_2 - 1)}{(x_1^2 + x_1 + 1)(x_2^2 + x_2 + 1)}$$

,

$$\because 0 < x_1 < x_2 < 1, \therefore x_2 - x_1 > 0, x_1x_2 - 1 < 0,$$

$$\text{又 } x_1^2 + x_1 + 1 = \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \text{ 同理 } x_2^2 + x_2 + 1 > 0,$$

$$\therefore y_1 - y_2 < 0, \text{ 即 } y_1 < y_2.$$

【点评】本题考查作差法、不等式的性质等基础知识，考查运算求解能力，是中档题.

8. (2022•南京模拟) 已知 $a > 0, b > 0, a + 2b = 1$, 求 $\frac{1}{3a+4b} + \frac{1}{a+3b}$ 的最小值.

【考点】基本不等式及其应用.

【专题】整体思想；综合法；不等式；数学运算.

【分析】因为 $a > 0, b > 0, a + 2b = 1$, 所以 $(3a + 4b) + (2a + 6b) = 5(a + 2b) = 5$, 利用构造思想, 用基本不等式可得出答案.

【解答】解: 因为 $a > 0, b > 0, a + 2b = 1$,

$$\text{所以 } (3a + 4b) + (2a + 6b) = 5(a + 2b) = 5,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3a+4b} + \frac{1}{a+3b} &= \frac{1}{3a+4b} + \frac{2}{2a+6b} = \frac{1}{5} [(3a+4b) + (2a+6b)] \left(\frac{1}{3a+4b} + \frac{2}{2a+6b} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left[3 + \frac{2a+6b}{3a+4b} + \frac{2(3a+4b)}{2a+6b} \right] \geq \frac{1}{5} \left[3 + 2\sqrt{\frac{2a+6b}{3a+4b} \cdot \frac{2(3a+4b)}{2a+6b}} \right] = \frac{1}{5} (3 + 2\sqrt{2}), \end{aligned}$$

当且仅当 “ $\frac{2a+6b}{3a+4b} = \frac{2(3a+4b)}{2a+6b}$ ” 时取等号, 即 $2a+6b = \sqrt{2}(3a+4b)$ 且 $a+2b=1$,

$$\text{即 } a = -7 + 5\sqrt{2}, b = 4 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 时取等号.}$$

$$\text{所以 } \frac{1}{3a+4b} + \frac{1}{a+3b} \text{ 的最小值为: } \frac{1}{5} (3 + 2\sqrt{2}).$$

【点评】本题考查了基本不等式, 学生的数学运算能力, 构造法, 属于中档题.

9. (2022 春•河西区校级期末) 已知函数 $f(x) = ax^2 + (b - 2)x + 3$ ($a \neq 0$).

(I) 若不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-1, 1)$, 求 a, b 的值;

(II) 若 $f(1) = 2$.

(i) $a > 0, b > 0$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值;

(ii) 若不等式 $f(x) < 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解集为空集, 求实数 a 的取值范围.

【考点】 不等式的综合.

【专题】 函数思想; 综合法; 函数的性质及应用; 逻辑推理; 数学运算.

【分析】 (I) 由已知得 $ax^2 + (b-2)x + 3 = 0$ 的两根为 $-1, 1$, 利用韦达定理直接求解.

(II) 由条件求出 $a+b=1$, (i) 利用基本不等式求出 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值;

(ii) 由 $ax^2 + (b-2)x + 3 < 1$, 得 $ax^2 + (b-2)x + 2 < 0$, 由不等式在 $\mathbf{R}$ 上解集是 $\emptyset$, 列不等式组, 能求出实数 a 的取值范围.

【解答】 解: (I) $\because$ 函数 $f(x) = ax^2 + (b-2)x + 3$ ($a \neq 0$),

不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-1, 1)$,

$\therefore ax^2 + (b-2)x + 3 = 0$ 的两根为 $-1, 1$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b-2}{a} = -1+1=0 \\ \frac{3}{a} = (-1) \times 1 = -1 \end{cases}, \text{ 解得 } a = -3, b = 2.$$

(II) (i) $f(1) = a+b-2+3=2$, $\therefore a+b=1$,

$\because a > 0, b > 0$,

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a+b) = \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} + 5 \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{4a}{b}} + 5 = 9,$$

当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$, 即 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ 时取等号,

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 9;

(ii) $\because$ 不等式 $f(x) < 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解集为空集,

$\therefore ax^2 + (b-2)x + 3 < 1$, 即 $ax^2 + (b-2)x + 2 < 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解集为空集,

$$\therefore \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = (b-2)^2 - 8a < 0 \end{cases},$$

$\because a+b=1$, 代入上式得 $(a+1)^2 - 8a < 0$, $\therefore a^2 - 6a + 1 < 0$,

解得 $3-2\sqrt{2} < a < 3+2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2})$.

【点评】 本题考查一元二次不等式的性质及解法、韦达定理、基本不等式、根的判别式等基础知识，考查运算求解能力，是中档题.

10. (2022 春•青铜峡市校级期末) (1) 已知 $x > 3$, 求 $\frac{4}{x-3} + x$ 的最小值;

(2) 已知 x, y 是正实数, 且 $x+y=1$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ 的最小值.

【考点】 基本不等式及其应用.

【专题】 转化思想; 综合法; 不等式的解法及应用; 数学运算.

【分析】 (1) 配凑可得 $\frac{4}{x-3} + x = \frac{4}{x-3} + (x-3) + 3$, 再利用基本不等式, 即可求解;

(2) 利用基本不等式中的“乘 1 法”, 即可得解.

【解答】 解: (1) $\because x > 3, \therefore x - 3 > 0$,

$$\therefore \frac{4}{x-3} + x = \frac{4}{x-3} + (x-3) + 3 \geq 2\sqrt{\frac{4}{x-3} \times (x-3)} + 3 = 4 + 3 = 7,$$

当且仅当 $\frac{4}{x-3} = x-3$, 即 $x=5$ 时取等号,

$\therefore \frac{4}{x-3} + x$ 的最小值为 7.

(2) $\because x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = (x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \right) = 4 + \left(\frac{y}{x} + \frac{3x}{y} \right) \geq 4 + 2 \times \sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{3x}{y}} = 4 + 2\sqrt{3},$$

当且仅当 $y = \sqrt{3}x$, 即 $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, y = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ 时取等号,

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ 的最小值为 $4+2\sqrt{3}$.

【点评】 本题考查基本不等式的应用, 熟练掌握配凑法, “乘 1 法”, 以及基本不等式“一正二定三相等”的条件是解题的关键, 考查运算求解能力, 属于基础题.

11. (2022•南京模拟) 解以下一元二次不等式

(1) $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$

(2) $-x^2 - 5x + 6 < 0$

(3) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

(4) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

【考点】 一元二次不等式及其应用.

【专题】 计算题; 函数思想; 综合法; 函数的性质及应用; 数学运算.

【分析】 (1) (3) (4) 对不等式的左边分解因式求解, (2) 由 $-x^2 - 5x + 6 < 0$, 得 $x^2 + 5x - 6 > 0$, 然后对不等式的左边分解因式求解.

【解答】解：（1）由 $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$ ，得 $(x - 1)(2x - 1) \leq 0$ ，

解得 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ，

所以不等式的解集为 $\{x | \frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$ ；

（2）由 $-x^2 - 5x + 6 < 0$ ，得 $x^2 + 5x - 6 > 0$ ，

则 $(x - 1)(x + 6) > 0$ ，解得 $x < -6$ 或 $x > 1$ ，

所以不等式的解集为 $\{x | x < -6 \text{ 或 } x > 1\}$ ；

（3）由 $4x^2 - 4x + 1 > 0$ ，得 $(2x - 1)^2 > 0$ ，

解得 $x \neq \frac{1}{2}$ ，

所以不等式的解集为 $\{x | x \neq \frac{1}{2}\}$ ；

（4）由 $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ ，得 $(x - 3)^2 \leq 0$ ，得 $x = 3$ ，

所以不等式的解集为 $\{x | x = 3\}$ 。

【点评】本题主要考查了解一元二次不等式，属于基础题。

12. （2022•南京模拟）解不等式 $(x - a)(x - a - 1) > 0$

【考点】一元二次不等式及其应用。

【专题】整体思想；综合法；不等式的解法及应用；数学运算。

【分析】结合二次函数图象和性质解一元二次不等式。

【解答】解：由于 $(x - a)(x - a - 1) = 0$ 的两个根为 a 、 $a + 1$ 且 $a + 1 > a$ ，

结合二次函数图象和性质，不等式的解集为 $\{x | x > a + 1 \text{ 或 } x < a\}$ 。

【点评】本题考查了不等式的解法，学生的数学运算能力，属于基础题。

13. （2022•南京模拟）在 $-2 \leq x < 4$ 内存在 x ，使得不等式 $-2x^2 - 4x + 3 \leq a$ 成立，求 a 的取值范围。

【考点】一元二次不等式及其应用。

【专题】整体思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算。

【分析】求出二次函数 $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$ 在 $-2 \leq x < 4$ 时的取值范围即可得。

【解答】解：设 $f(x) = -2x^2 - 4x + 3 = -2(x + 1)^2 + 5$ ，对称轴是 $x = -1$ ，

函数在 $-2 \leq x < -1$ 时递增，在 $-1 < x < 4$ 时递减，而 $f(4) = -45$ ， $f(-2) = 3 > -45$ ，

所以 $f(x) > -45$ ，故要满足题意，则 $a > -45$ 。

故 a 的取值范围为 $\{a | a > -45\}$ 。

【点评】本题主要考查了二次函数的性质的应用，属于基础题.

14. (2022•南京模拟) 关于 x 的方程 $-x^2+3x-m=3-x$ 的实数根中，恰有一个正数解满足不等式 $3-x>0$ ，求实数 m 的取值范围.

【考点】一元二次不等式及其应用.

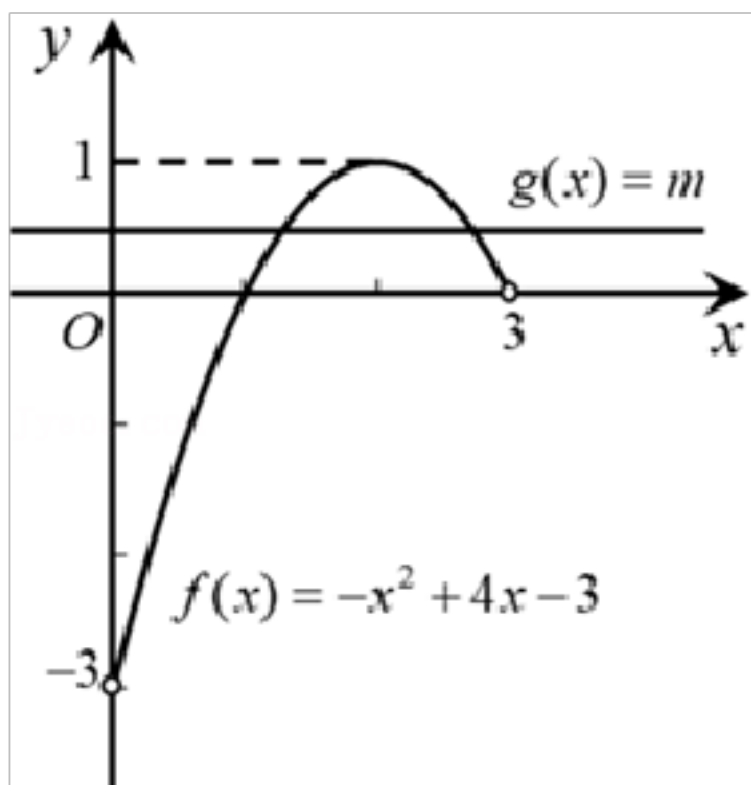
【专题】数形结合；函数思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算.

【分析】将方程转化为两个函数的交点问题，即可求出实数 m 的取值范围.

【解答】解：原方程 $-x^2+3x-m=3-x$ 可化为 $-x^2+4x-3=m$,

方程满足题意的解 x_0 满足 $0<x_0<3$,

设 $f(x) = -x^2+4x-3$, $g(x) = m$, 画出它们的图象，如下图，



由图可知，

当 $-3<m\leq 0$ 或 $m=1$ 时，两函数图象在 $[0, 3]$ 上有唯一的交点，

所以 $-3<m\leq 0$ 或 $m=1$.

所以 m 的取值范围为 $\{m \mid -3<m\leq 0 \text{ 或 } m=1\}$.

【点评】本题主要考查了二次函数的实根分布，体现了数形结合思想的应用，属于中档题.

15. (2022•南京模拟) 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) - f(x) = 2x - 1$ ，且 $f(1) = -4$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 当 $x \in [-2, 2]$ 时，不等式 $f(x) > 4x+m$ 恒成立；求实数 m 的取值范围；

(3) 设 $h(m) = f(2m+a)$, $m \in [-3, 3]$ 求 $h(m)$ 的最大值.

【考点】二次函数的性质与图象；函数解析式的求解及常用方法；函数恒成立问题.

【专题】函数思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算.

【分析】(1) 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 再根据 $f(x+1) - f(x) = 2x - 1$ 结合系数的关系求解即可;

(2) 化简可得 $x^2 - 6x - 3 > m$, 再根据 $g(x) = x^2 - 6x - 3 = (x - 3)^2 - 12$ 在区间 $x \in [-2, 2]$ 上的单调性求最小值即可;

(3) 求得 $h(m) = 4m^2 + (4a - 4)m + a^2 - 2a - 3$, 再根据对称轴与区间 $m \in [-3, 3]$ 中点的位置关系求最大值分析即可

【解答】解: (1) 由于 $f(x)$ 是二次函数, 可设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\because f(x+1) - f(x) = 2x - 1$ 恒成立, $\therefore a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) = 2x - 1$ 恒成立, $2ax + a + b = 2x - 1$,

$$\text{又} \because f(1) = -4, \therefore \begin{cases} a+b+c=-4, \\ 2a=2, \\ a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=-2, \\ c=-3. \end{cases} \therefore f(x) = x^2 - 2x - 3;$$

(2) 当 $x \in [-2, 2]$ 时, $f(x) > 4x + m$ 恒成立,

即 $x^2 - 6x - 3 > m$ 恒成立,

令 $g(x) = x^2 - 6x - 3 = (x - 3)^2 - 12$, 当 $x \in [-2, 2]$ 时, $g(x)$ 单调递减, $g(x)_{\min} = g(2) = -11$.

所以 $m < -11$;

(3) $h(m) = f(2m+a) = (2m+a)^2 - 2(2m+a) - 3 = 4m^2 + (4a-4)m + a^2 - 2a - 3$,

$m \in [-3, 3]$, 对称轴为 $m_0 = \frac{1-a}{2}$,

① 当 $\frac{1-a}{2} \geq 0$, 即 $a \leq 1$ 时, $h(m)_{\max} = h(-3) = a^2 - 14a + 45$;

② 当 $\frac{1-a}{2} < 0$, 即 $a > 1$ 时, $h(m)_{\max} = h(3) = a^2 + 10a + 21$,

综上所述 $h(m)_{\max} = \begin{cases} a^2 + 10a + 21, & a > 1, \\ a^2 - 14a + 45, & a \leq 1. \end{cases}$

【点评】本题主要考查了函数解析式的求解, 还考查了函数单调性在函数最值求解中的应用, 体现了分类讨论思想的应用, 属于中档题.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/996102003004010104>