一元二次方程及其应用

一 选择题

1（201 •江苏淮安• 分）若关于 的一元二次方程 ^{2} - 2 - k 1=0有两个相等的实数根，则 k 的值是（ ）

A. - 1 B. 0 C. 1 D. 2

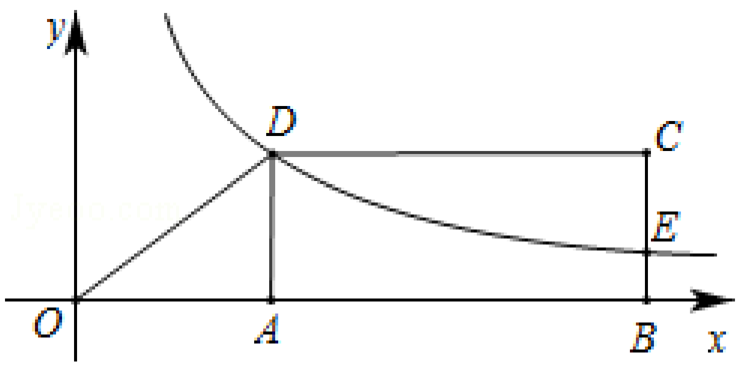
【分析】根据判别式的意义得到△=（ - 2）^{2} - 4（ - k ）=0，然后解一次方程即可.

【解答】解：根据题意得△=（ - 2）^{2} - 4（ - k ）=0，解得 k=0.

故选：B.

【点评】本题考查了根的判别式：一元二次方程 a ^{2} b （a≠0）的根与△=b^{2} - 4a 有如下关系：当△＞0 时，方程有两个不相等的实数根；当△=0 时，方程有两个相等的实数根；当△＜0 时，方程无实数根.

2 （201 •江苏苏州• 分）如图，矩形 ABCD 的顶点 A，B 在 轴的正半轴上，反比例函数 $\frac{k}{x}$在第一象限内的图象经过点 D，交 BC 于点 E．若 AB=4，CE=2BE，tan∠AOD=$\frac{3}{4}$，则 k 的值为（ ）



A. B. $2\sqrt{3}$ C D. 12

【分析】由 tan∠AOD=$\frac{AD}{OA}$=$\frac{3}{4}$可设 AD= A OA=4a在表示出点 D E的坐标，由反比例函数经过点 D E列出关于 a 的方程，解之求得 a 的值即可得出答案.

【解答】解：∵tan∠AOD=$\frac{AD}{OA}$=$\frac{3}{4}$，

∴设 AD= A OA=4a

则 BC=AD= a 点 D 坐标为（4a， a，

∵CE=2BE，∴BE=$\frac{1}{3}$BC=a，

∵AB=4，∴点 E（4 4a a），

∵反比例函数 $\frac{k}{x}$经过点 D E ∴k=12a^{2}=（4 4a a，解得：a=$\frac{1}{2}$或 a=0（舍），则 k=12×$\frac{1}{4}$= ，

故选：A.

【点评】本题主要考查反比例函数图象上点的坐标特征，解题的关键是根据题意表示出点 D E的坐标及反比例函数图象上点的横纵坐标乘积都等于反比例系数 k.

（201 •内蒙古包头市• 分）已知关于 的一元二次方程 ^{2} 2 - 2=0 有两个实数根， 为正整数，且该

方程的根都是整数，则符合条件的所有正整数 m 的和为（　　）

．　　．5　　．4　　．3

【分析】根据方程的系数结合根的判别式△≥0，即可得出 m≤3，由 m 为正整数结合该方程的根都是整数，即可求出 m 的值，将其相加即可得出结论．

【解答】解：∵a=1，b=2，　=m-2，关于　的一元二次方程 ^{2}+2　+m-2=0 有实数根

∴△=b^2-4a　=2^2-4（m-2）=12-4m≥0，

∴m≤3．

∵m 为正整数，且该方程的根都是整数，

∴m=2 或 3．

∴2+3=5．

故选：．

【点评】本题考查了根的判别式以及一元二次方程的整数解，牢记"当△≥0 时，方程有实数根"是解题的关键．

4 （2018•上海•4 分）下列对一元二次方程 ^{2}+　-3=0 根的情况的判断，正确的是（　　）

．有两个不相等实数根　　．有两个相等实数根

．有且只有一个实数根　　．没有实数根

【分析】根据方程的系数结合根的判别式，即可得出△=13＞0，进而即可得出方程 ^{2}+　-3=0 有两个不相等的实数根．

【解答】解：∵a=1，b=1，　=-3，

∴△=b^2-4a　=1^2-4×（1）×（-3）=13＞0，

∴方程 ^{2}+　-3=0 有两个不相等的实数根．

故选：．

【点评】本题考查了根的判别式，牢记"当△＞0 时，方程有两个不相等的实数根"是解题的关键．

5 （2018•乌鲁木齐•4 分）宾馆有 50 间房供游客居住，当每间房每天定价为 180 元时，宾馆会住满；当每间房每天的定价每增加 10 元时，就会空闲一间房．如果有游客居住，宾馆需对居住的每间房每天支出 20 元的费用．当房价定为多少元时，宾馆当天的利润为 10890 元？设房价定为　元．则有（　　）

．（180+　-20）（50-$\frac{x}{10}$）=10890　．（　-20）（50-$\frac{x-180}{10}$）=10890

．　（50-$\frac{x-180}{10}$）-50×20=10890　．（　+180（50-$\frac{x}{10}$）-50×20=10890

【分析】设房价定为　元，根据利润=房价的净利润×入住的房间数可得．

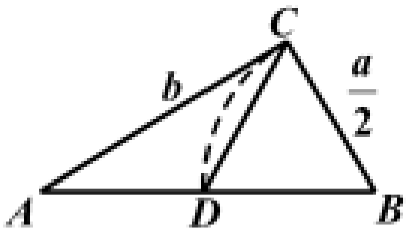
【解答】解：设房价定为　元，

根据题意，得（　-20）（50-$\frac{x-180}{10}$）=10890．

故选：．

【点评】此题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，解题的关键是理解题意找到题目蕴含的相等关系.

（2　•嘉兴•　分）欧几里得的《原本》记载 形如$x^2+ax=b^2$的方程的图解法是：画$Rt\Delta ABC$，使$\angle ACB=90°$ $BC=\frac{a}{2}$ $AC=b$ 再在斜边AB上截取$BD=\frac{a}{2}$ 则该方程的一个正根是（）



AC的长　　AD的长　　BC的长　　CD的长

【答案】

【解析】【分析】可以利用求根公式求出方程的根，根据勾股定理求出　的长，进而求得　的长 即可发现结论

【解答】用求根公式求得：$x_1=\frac{-\sqrt{4b^2+a^2}-a}{2};x_2=\frac{\sqrt{4b^2+a^2}-a}{2}$

$\because \angle C=90°, BC=\frac{a}{2}, AC=b,$

$\therefore AB=\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}},$

$\therefore AD=\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}-\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{4b^2+a^2}-a}{2}.$

的长就是方程的正根

故选

【点评】考查解一元二次方程已经勾股定理等，熟练掌握公式法解一元二次方程是解题的关键

（2　•贵州安顺•　分）一个等腰三角形的两条边长分别是方程$x^2-7x+10=0$的两根，则该等腰三角形的周长是（　）

12　　13　　12或

【答案】

【解析】试题分析：$\because x^2-7x+10=0$，

$\therefore (x-2)(x-5)=0$，

即$x_1=2$，$x_2=5$，

①等腰三角形的三边是2，2，　，

∵2+2＜　，

∴不符合三角形三边关系定理，此时不符合题意；

②等腰三角形的三边是2，　，　，此时符合三角形三边关系定理，

三角形的周长是2+　+　；　2

即等腰三角形的周长是 2 故选 .

考点： . 解一元二次方程 因式分解法；2．三角形三边关系；3．等腰三角形的性质．

（2 •广西桂林•3 分）已知关于 x 的一元二次方程$2x^2-kx+3=0$有两个相等的实根，则 k 的值为（ ）

$\pm2\sqrt{6}$ $\pm\sqrt{6}$ 或 3 2 $\sqrt{2}$或$\sqrt{3}$

【答案】

【解析】分析：根据方程有两个相等的实数根结合根的判别式即可得出关于 k 的方程，解之即可得出结论．

详解：∵方程$2x^2-kx+3=0$有两个相等的实根，

∴△=k2 4×2×3=k2 24=，

解得：k=$\pm2\sqrt{6}$．

故选： .

点睛：本题考查了根的判别式，熟练掌握"当△= 时，方程有两个相等的两个实数根"是解题的关键．

（2 •广西南宁•3 分）某种植基地 2 年蔬菜产量为 吨，预计 2 年蔬菜产量达到 吨，求蔬菜产量的年平均增长率，设蔬菜产量的年平均增长率为 x，则可列方程为（ ）

. (+x) 2= . (- x) 2= . (+2x) = . (+x) =

【分析】利用增长后的量=增长前的量×（ 增长率），设平均每次增长的百分率为 x，根据"从 吨增加到 吨"，即可得出方程．

【解答】解：由题意知，蔬菜产量的年平均增长率为 x，

根据 2 年蔬菜产量为 吨，则 2 年蔬菜产量为 (+x) 吨

，2 年蔬菜产量为 (+x) (+x) 吨，预计 2 年蔬菜产量达到 吨，

即： (+x) (+x) = 或 (+x) 2= .

故选： .

【点评】此题考查了一元二次方程的应用（增长率问题）．解题的关键在于理清题目的含义，找到 2 年和 2 年的产量的代数式，根据条件找准等量关系式，列出方程．

（2 • 黑龙江龙东地区 • 3 分）某中学组织初三学生篮球比赛，以班为单位，每两班之间都比赛一场，计划安排 场比赛，则共有多少个班级参赛？（ ）

. 4 . . .

【分析】设共有 x 个班级参赛，根据第一个球队和其他球队打（x - ）场球，第二个球队和其他球队打（x - 2）场，以此类推可以知道共打（ +2+3+…+x - ）场球，然后根据计划安排 场比赛即可列出方程求解．

【解答】解：设共有 x 个班级参赛，根据题意得：

$\frac{x(x-1)}{2}=$ ，

解得：x = ，x_2 = - （不合题意，舍去），

则共有 个班级参赛.

故选： .

【点评】此题考查了一元二次方程的应用，关键是准确找到描述语，根据等量关系准确的列出方程．此题还要判断所求的解是否符合题意，舍去不合题意的解．

10 （2018•福建 卷•4 分）已知关于 的一元二次方程（a+1） 2+2b +（a+1）=0 有两个相等的实数根，下列判断正确的是（ ）

．1 一定不是关于 的方程 2+b +a=0的根

．0 一定不是关于 的方程 2+b +a=0的根

．1 和﹣1 都是关于 的方程 2+b +a=0的根

．1 和﹣1 不都是关于 的方程 2+b +a=0的根

【分析】根据方程有两个相等的实数根可得出 b=a+1 或 b=﹣（a+1），当 b=a+1 时，﹣1 是方程 2+b +a=0的根；当 b=﹣（a+1）时，1 是方程 2+b +a=0的根．再结合 a+1≠﹣（a+1），可得出 1 和﹣1 不都是关于 的方程 2+b +a=0的根．

【解答】解：∵关于 的一元二次方程（a+1） 2+2b +（a+1）=0 有两个相等的实数根，

$$\therefore \begin{cases} a+1\neq 0 \\ \triangle=(2b)^2-4(a+1)^2=0 \end{cases},$$

∴b=a+1 或 b=﹣（a+1）．

当 b=a+1 时，有 a﹣b+1=0，此时﹣1 是方程 2+b +a=0的根；

当 b=﹣（a+1）时，有 a+b+1=0，此时 1 是方程 2+b +a=0的根．

∵a+1≠0，

∴a+1≠﹣（a+1），

∴1 和﹣1 不都是关于 的方程 2+b +a=0的根．

故选： .

【点评】本题考查了根的判别式以及一元二次方程的定义，牢记“当△=0 时，方程有两个相等的实数根”是解题的关键．

11 （2018•福建 卷•4 分）已知关于 的一元二次方程（a+1） 2+2b +（a+1）=0 有两个相等的实数根，下列判断正确的是（ ）

．1 一定不是关于 的方程 2+b +a=0的根

．0 一定不是关于 的方程 2+b +a=0的根

．1 和﹣1 都是关于 的方程 2+b +a=0的根

．1 和﹣1 不都是关于 的方程 2+b +a=0的根

【分析】根据方程有两个相等的实数根可得出 b=a+1 或 b=﹣（a+1），当 b=a+1 时，﹣1 是方程 2+b +a=0的根；当 b=﹣（a+1）时，1 是方程 2+b +a=0的根．再结合 a+1≠﹣（a+1），可得出 1 和﹣1 不都是关于 的

方程 ^{2}+b +a=0的根．

【解答】解：∵关于 的一元二次方程（a+1） ^{2}+2b +（a+1）=0 有两个相等的实数根，

∴$\begin{cases} a+1\neq 0 \\ \triangle=(2b)^2-4(a+1)^2=0 \end{cases}$，

∴b=a+1 或 b=﹣（a+1）．

当 b=a+1 时，有 a﹣b+1=0，此时﹣1 是方程 ^{2}+b +a=0的根；

当 b=﹣（a+1）时，有 a+b+1=0，此时 1 是方程 ^{2}+b +a=0的根．

∵a+1≠0，

∴a+1≠﹣（a+1），

∴1 和﹣1 不都是关于 的方程 ^{2}+b +a=0的根．

故选： ．

【点评】本题考查了根的判别式以及一元二次方程的定义，牢记"当△=0 时，方程有两个相等的实数根"是解题的关键．

12 （2018•广东•3 分）关于 的一元二次方程 ^{2}﹣3 + =0有两个不相等的实数根，则实数 的取值范围是（　　）

．$<\frac{9}{4}$ ．$\leqslant\frac{9}{4}$ ．$>\frac{9}{4}$ ．$\geqslant\frac{9}{4}$

【分析】根据一元二次方程的根的判别式，建立关于 的不等式，求出 的取值范围即可．

【解答】解：∵关于 的一元二次方程 ^{2}﹣3 + =0有两个不相等的实数根，

∴△=b^2﹣ a =（﹣3）^{2}﹣ ×1× >0，

∴ $<\frac{9}{4}$．

故选： ．

【点评】此题考查了根的判别式，一元二次方程根的情况与判别式△的关系：（1）△>0⇔方程有两个不相等的实数根；（2）△=0⇔方程有两个相等的实数根；（3）△<0⇔方程没有实数根．

1 （2018•广西北海•3分）某种植基地 201 年蔬菜产量为 80吨，预计 2018年蔬菜产量达到 100吨，求蔬菜产量的年平均增长率 设蔬菜产量的年平均增长率为，则可列方程为

80 1 + = 100　　　　100− 1 = 80

80 1 + 2= 100　　　　80 1 + = 100

【答案】

【考点】由实际问题抽象出一元二次方程

【解析】由题意知,蔬菜产量的年平均增长率为 ,根据 201 年蔬菜产量为 80吨,
则 201 年蔬菜产量为80 1 吨，2018 年蔬菜产量为80 1 1
吨 预计 2018年蔬菜产量达到 100吨，即80 1 1
100，即80 1 100
故选

【点评】此题考查了一元二次方程的应用 增长率问题 解题的关键是在于理清题目的意思， 找到 201 年和 2018年的产量的代数式，根据条件找出等量关系式，列出方程

1 （2018•广西贵港•3 分）已知α，β 是一元二次方程 ^{2} - 2 0的两个实数根，则α β - α β 的值是（ ）

. 3 . 1 . - 1 . - 3

【分析】据根与系数的关系α β - 1，α β - 2，求出α β 和α β 的值，再把要求的式子进行整理，即可得出答案.

【解答】解：∵α，β 是方程 ^{2} - 2 0的两个实数根，

∴α β - 1，α β - 2，

∴α β - α β - 1 - 2 - 3，

故选： .

【点评】本题主要考查一元二次方程根与系数的关系，熟练掌握根与系数关系的公式是关键.

1 （2018•贵州铜仁• 分）关于 的一元二次方程 ^{2} - 3 的解为（ ）

. $_1$ - 1， $_2$ 3 . $_1$ 1 $_2$ - 3 . $_1$ 1 $_2$ 3 . $_1$ - 1， $_2$ - 3

【分析】利用因式分解法求出已知方程的解.

【解答】解： ^{2} - 3 0

分解因式得：（ - 1）（ - 3） 0

解得： $_1$ 1 $_2$ 3

故选： .

1 （2018•贵州遵义•3 分）已知 $_1$， $_2$ 是关于 的方程 ^{2} - 3 0的两根，且满足 $_1$ $_2$ - 3 $_1$ $_2$ ，那么 的值为（ ）

. . - . 3 . - 3

【分析】直接利用根与系数的关系得出 $_1$ $_2$ - ， $_1$ $_2$ - 3，进而求出答案.

【解答】解：∵ $_1$， $_2$ 是关于 的方程 ^{2} - 3 0的两根，

∴ - ，

- ，

则 - ，

- - ×（ - ） ，

解得： .4

故选： .

（ 年湖南省娄底市）关于 的一元二次方程 - （ ） 的根的情况是（ ）

. 有两不相等实数根 . 有两相等实数根

. 无实数根 . 不能确定

【分析】先计算判别式得到△ （ ） - 4× （ ） ，再利用非负数的性质得到△> ，然后可判断方程根的情况.

【解答】解：△ （ ） - 4× （ ） ，

∵（ ）≥ ，

∴（ ） > ，即△> ，

所以方程有两个不相等的实数根.

故选： .

【点评】本题考查了根的判别式：一元二次方程 （ ≠ ）的根与△ - 4 有如下关系：当△> 时，方程有两个不相等的实数根；当△ 时，方程有两个相等的实数根；当△< 时，方程无实数根.

（ 湖南湘西州 4 分）若关于 的一元二次方程 - 有一个解为 - ，则另一个解为（ ）

. . - . . 4

【分析】设方程的另一个解为 ，根据两根之和等于 $-\frac{b}{a}$，即可得出关于 的一元一次方程，解之即可得出结论.

【解答】解：设方程的另一个解为 ，

根据题意得： - ，

解得： .

故选： .

【点评】本题考查了根与系数的关系以及一元二次方程的解，牢记两根之和等于 $-\frac{b}{a}$、两根之积等于$\frac{c}{a}$是解题的关键.

（ •上海•4 分）下列对一元二次方程 - 根的情况的判断，正确的是（ ）

．有两个不相等实数根　　．有两个相等实数根

．有且只有一个实数根　　．没有实数根

【分析】根据方程的系数结合根的判别式，即可得出△=1 ＞0，进而即可得出方程 ^{2} － =0有两个不相等的实数根．

【解答】解：∵ =1 =1 =－ ，

∴△= ^{2} - 4 =1 4×（1）×（－ ）=1 ＞0，

∴方程 ^{2} － =0有两个不相等的实数根．

故选： ．

【点评】本题考查了根的判别式，牢记“当△＞0 时，方程有两个不相等的实数根”是解题的关键．

19 （2018•乌鲁木齐•4 分）宾馆有 50 间房供游客居住，当每间房每天定价为 180 元时，宾馆会住满；当每间房每天的定价每增加 10 元时，就会空闲一间房．如果有游客居住，宾馆需对居住的每间房每天支出 20 元的费用．当房价定为多少元时，宾馆当天的利润为 10890 元？设房价定为 元．则有（　　）

．（180 －20）（50－$\frac{x}{10}$）=10890　．（ －20）（50－$\frac{x-180}{10}$）=10890

．（50－$\frac{x-180}{10}$）－50×20=10890　．（ 180（50－$\frac{x}{10}$）－50×20=10890

【分析】设房价定为 元，根据利润=房价的净利润×入住的房间数可得．

【解答】解：设房价定为 元，

根据题意，得（ －20）（50－$\frac{x-180}{10}$）=10890．

故选： ．

【点评】此题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，解题的关键是理解题意找到题目蕴含的相等关系．

二 填空题

1 （2018 • 湖南郴州 • 分）已知关于 的一元二次方程 ^{2} － =0有一个根为－ ，则方程的另一个根为 2 ．

【分析】根据根与系数的关系得出 （－ ）=－ ，－ =，求出即可．

【解答】解：设方程的另一个根为 ，

则根据根与系数的关系得： （－ ）=－ ，－ =，

解得： =2

故答案为：2．

【点评】本题考查了根与系数的关系和一元二次方程的解，能熟记根与系数的关系的内容是解此题的关键．

（ 0 •湖南怀化• 分）关于 x 的一元二次方程 x x 有两0个相等的实数根，则 的值是_____.

【分析】由于关于 x 的一元二次方程 x x 有两0个相等的实数根，可知其判别式为 0，据此列出关于 的方程，解答即可.

【解答】解：∵关于 x 的一元二次方程 x x 有两0个相等的实数根，

∴△ 0，

∴ - ，0

∴ ，

故答案为： .

【点评】本题主要考查了根的判别式的知识，解答本题的关键是掌握一元二次方程有两个相等的实数根，则可得△ 0，此题难度不大.

（ 0 •江苏徐州• 分）若 x x 为方程 x x- 0的两个实数根，则 x x ___-___.

【分析】直接根据根与系数的关系求解.

【解答】解：根据题意得 x x - .

故答案为- .

【点评】本题考查了一元二次方程 ax x （a≠0）0的根与系数的关系：若方程两个为 x，x，则 x x $-\frac{b}{a}$，x•x $\frac{c}{a}$.

（ 0 •江苏淮安• 分）一元二次方程 x - x 0的根是__x 0，x___.

【分析】方程左边分解因式后，利用两数相乘积为 0，两因式中至少有一个为 0 转化为两个一元一次方程来求解.

【解答】解：方程变形得：x（x - ） 0，

可得 x 0或 x - ，0

解得：x 0，x .

故答案为：x 0，x .

【点评】此题考查了解一元二次方程 - 因式分解法，熟练掌握方程的解法是解本题的关键.

（ 0 •江苏苏州• 分）若关于 x 的一元二次方程 x x 有一0个根是 ，则 n - ___.

【分析】根据一元二次方程的解的定义把 x 代入 x x 得到0 得 n 0 - ，然后利用整体代入的方法进行计算.

【解答】解：∵ （n≠0）是关于 x 的一元二次方程 x x 的一0个根，

∴ m ， 0

∴ m ，

故答案为：－ .

【点评】本题考查了一元二次方程的解（根）：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解．又因为只含有一个未知数的方程的解也叫做这个方程的根，所以，一元二次方程的解也称为一元二次方程的根．

（ 0 •山东烟台市• 分）已知关于 的一元二次方程 － －m 0的实数根 ， ，满足 － － ＞ ，则m的取值范围是 ＜m≤5 ．

【分析】根据根的判别式△＞0、根与系数的关系列出关于m的不等式组，通过解该不等式组，求得m的取值范围．

【解答】解：依题意得：$\begin{cases}(-4)^2-4(m-1)\geqslant 0\\3\times(m-1)-4>2\end{cases}$，

解得 ＜m≤5．

故答案是： ＜m≤5．

【点评】本题考查了一元二次方程的根的判别式的应用，解此题的关键是得出关于m的不等式，注意：一元二次方程a （ 0 为常数，a≠0）①当 － a＞0时，一元二次方程有两个不相等的实数根，②当 － a 0时，一元二次方程有两个相等的实数根，③当 － a＜0时，一元二次方程没有实数根．

（ 0 •山东聊城市• 分）已知关于 的方程（ － ） － － 0有两个相等的实根，则 的值是 $\frac{3}{4}$ ．

【分析】根据二次项系数非零及根的判别式△ 0，即可得出关于 的一元一次不等式及一元一次方程，解之即可得出 的值．

【解答】解：∵关于 的方程（ － ） － － 0有两个相等的实根，

∴$\begin{cases}k-1\neq 0\\\triangle=(-2k)^2-4(k-1)(k-3)=0\end{cases}$，

解得： $\frac{3}{4}$．

故答案为：$\frac{3}{4}$．

【点评】本题考查了根的判别式以及一元二次方程的定义，牢记“当△ 0时，方程有两个相等的实数根”是解题的关键．