

2023-2024 学年广东省汕头市潮阳南侨中学校高三下学期第三次月考数学试题

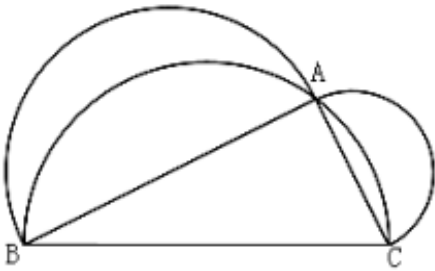
注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

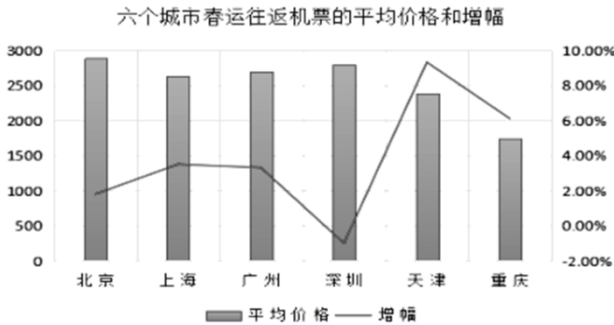
1. 下图是来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形，此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC 、直角边 AB 、 AC ，已知以直角边 AC 、 AB 为直径的半圆的面积之比为 $\frac{1}{4}$ ，记 $\angle ABC = \alpha$ ，则

$\cos^2 \alpha + \sin 2\alpha = (\quad)$



- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. 1 D. $\frac{8}{5}$

2. 下图是民航部门统计的某年春运期间，六个城市售出的往返机票的平均价格（单位元），以及相比于上一年同期价格变化幅度的数据统计图，以下叙述不正确的是 ()



- A. 深圳的变化幅度最小，北京的平均价格最高
- B. 天津的往返机票平均价格变化最大
- C. 上海和广州的往返机票平均价格基本相当
- D. 相比于上一年同期，其中四个城市的往返机票平均价格在增加

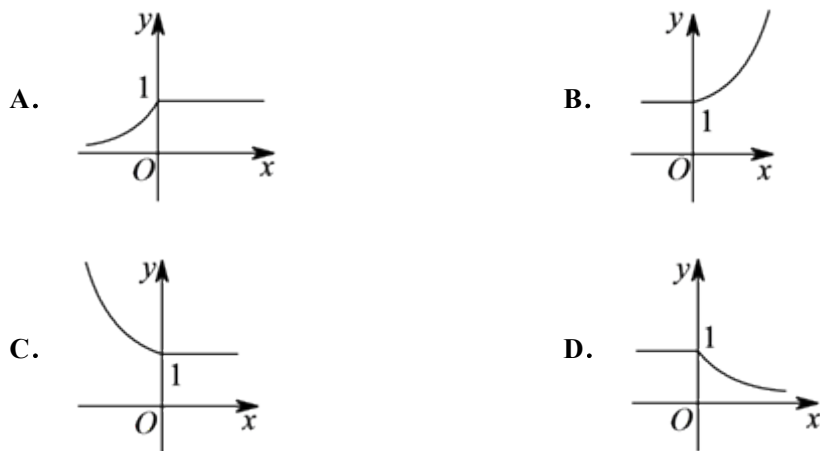
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = n^2 \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12} =$ ()

- A. 0 B. 55 C. 66 D. 78

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ x^2 - 2x, & x < 0 \end{cases}$, 若关于 x 的不等式 $[f(x)]^2 + af(x) < 0$ 恰有 1 个整数解, 则实数 a 的最大值为 ()

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 8

5. 定义运算 $a \oplus b = \begin{cases} a(a \leq b) \\ b(a > b) \end{cases}$, 则函数 $f(x) = 1 \oplus 2^x$ 的图象是 ().



6. 2019 年 10 月 1 日上午, 庆祝中华人民共和国成立 70 周年阅兵仪式在天安门广场隆重举行. 这次阅兵不仅展示了我国的科技军事力量, 更是让世界感受到了中国的日新月异. 今年的阅兵方阵有一个很抢眼, 他们就是院校科研方阵. 他们是由军事科学院、国防大学、国防科技大学联合组建. 若已知甲、乙、丙三人来自上述三所学校, 学历分别有学士、硕士、博士学位. 现知道: ①甲不是军事科学院的; ②来自军事科学院的不是博士; ③乙不是军事科学院的; ④乙不是博士学位; ⑤国防科技大学的是研究生. 则丙是来自哪个院校的, 学位是什么 ()

- A. 国防大学, 研究生 B. 国防大学, 博士
C. 军事科学院, 学士 D. 国防科技大学, 研究生

7. 已知角 α 的终边与单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 交于点 $P\left(\frac{1}{3}, y_0\right)$, 则 $\cos 2\alpha$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $-\frac{7}{9}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

8. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 下列命题中正确的是 ()

- A. 若 $\alpha \perp \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m \perp n$
B. 若 $\alpha // \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m // n$

C. 若 $m \perp n$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

D. 若 $m \perp \alpha$, $m // n$, $n // \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

9. “完全数”是一些特殊的自然数, 它所有的真因子(即除了自身以外的约数)的和恰好等于它本身. 古希腊数学家毕达哥拉斯公元前六世纪发现了第一、二个“完全数”6 和 28, 进一步研究发现后续三个“完全数”分别为 496, 8128, 33550336, 现将这五个“完全数”随机分为两组, 一组 2 个, 另一组 3 个, 则 6 和 28 不在同一组的概率为 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

10. 设过定点 $M(0, 2)$ 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 交于不同的两点 P, Q , 若原点 O 在以 PQ 为直径的圆的外部, 则直线 l 的斜率 k 的取值范围为 ()

- A. $\left(-\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ B. $\left(-\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \sqrt{5}\right)$
C. $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{5}\right)$ D. $\left(-\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{5}\right)$

11. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $|x-1| < 2$ ”是“ $x^2 < x$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

12. 已知点 A 是抛物线 $x^2 = 4y$ 的对称轴与准线的交点, 点 F 为抛物线的焦点, 点 P 在抛物线上且满足

$|PA| = m|PF|$, 若 m 取得最大值时, 点 P 恰好在以 A, F 为焦点的椭圆上, 则椭圆的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3} - 1$ B. $\sqrt{2} - 1$ C. $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^{x-4}, & x < 0, \\ \log_2 x, & x > 0, \end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x) > a$ 的解集为 $(a^2, +\infty)$, 则实数 a 的所有可能值之和为 _____.

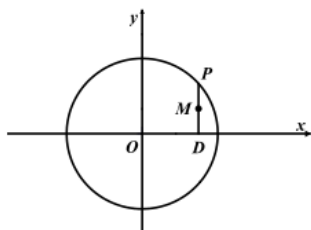
14. 五声音阶是中国古乐基本音阶, 故有成语“五音不全”. 中国古乐中的五声音阶依次为: 宫、商、角、徵、羽, 如果把这五个音阶全用上, 排成一个五个音阶的音序, 且要求宫、羽两音阶不相邻且在角音阶的同侧, 可排成 _____ 种不同的音序.

15. 若复数 z 满足 $\frac{z}{i} = 2 + i$, 其中 i 是虚数单位, 则 z 的模是 _____.

16. 已知 $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $\sqrt{6}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

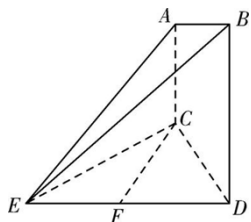
17. (12 分) P 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的动点, P 点在 x 轴上的射影是 D , 点 M 满足 $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DP}$.



(1) 求动点 M 的轨迹 C 的方程, 并说明轨迹是什么图形;

(2) 过点 $N(3,0)$ 的直线 l 与动点 M 的轨迹 C 交于不同的两点 A, B , 求以 OA, OB 为邻边的平行四边形 $OAEB$ 的顶点 E 的轨迹方程.

18. (12 分) 如图所示, 已知 $AC \perp$ 平面 CDE , $BD \parallel AC$, $\triangle CDE$ 为等边三角形, F 为边 ED 上的中点, 且 $CD = BD = 2AC = 2$.



(I) 求证: $CF \parallel$ 面 ABE ;

(II) 求证: 平面 $ABE \perp$ 平面 BDE ;

(III) 求该几何体 $E-ABDC$ 的体积.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x - m \ln(x+1)$, 其中 $m \in R$.

(I) 若 $m > 0$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 设 $g(x) = f(x) + \frac{1}{e^x}$. 若 $g(x) > \frac{1}{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 m 的最大值.

20. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, F 是椭圆 C 的一个焦点, 点 $M(0,2)$, 直线 MF 的斜率为 1.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(1) 若过点 M 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 N , 是否存在直线 l 使得 $|AB| = 2|MN|$? 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

21. (12 分)

2019 年春节期间，某超市准备举办一次有奖促销活动，若顾客一次消费达到 400 元则可参加一次抽奖活动，超市设计了两种抽奖方案.

方案一：一个不透明的盒子中装有 30 个质地均匀且大小相同的小球，其中 10 个红球，20 个白球，搅拌均匀后，顾客从中随机抽取一个球，若抽到红球则顾客获得 60 元的返金券，若抽到白球则获得 20 元的返金券，且顾客有放回地抽取 3 次.

方案二：一个不透明的盒子中装有 30 个质地均匀且大小相同的小球，其中 10 个红球，20 个白球，搅拌均匀后，顾客从中随机抽取一个球，若抽到红球则顾客获得 80 元的返金券，若抽到白球则未中奖，且顾客有放回地抽取 3 次.

(1) 现有两位顾客均获得抽奖机会，且都按方案一抽奖，试求这两位顾客均获得 180 元返金券的概率；

(2) 若某顾客获得抽奖机会.

①试分别计算他选择两种抽奖方案最终获得返金券的数学期望；

②为了吸引顾客消费，让顾客获得更多金额的返金券，该超市应选择哪一种抽奖方案进行促销活动？

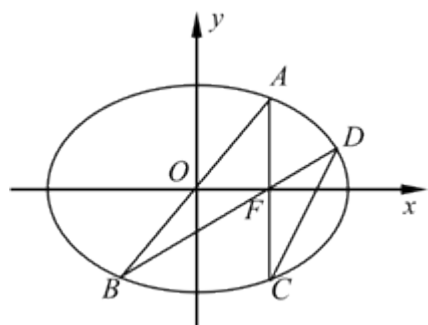
22. (10 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，且过点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$. F 为

椭圆的右焦点， A, B 为椭圆上关于原点对称的两点，连接 AF, BF 分别交椭圆于 C, D 两点.

(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 若 $AF = FC$ ，求 $\frac{BF}{FD}$ 的值；

(3) 设直线 AB ， CD 的斜率分别为 k_1 ， k_2 ，是否存在实数 m ，使得 $k_2 = mk_1$ ，若存在，求出 m 的值；若不存在，请说明理由.



参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

【解析】

根据以直角边 AC 、 AB 为直径的半圆的面积之比求得 $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ ，即 $\tan \alpha$ 的值，由此求得 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值，进而求得所求表达式的值。

【详解】

由于直角边 AC 、 AB 为直径的半圆的面积之比为 $\frac{1}{4}$ ，所以 $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ ，即 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ，所以 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ， $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ，

$$\text{所以 } \cos^2 \alpha + \sin 2\alpha = \frac{4}{5} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}.$$

故选：D

【点睛】

本小题主要考查同角三角函数的基本关系式，考查二倍角公式，属于基础题。

2、D

【解析】

根据条形图可折线图所包含的数据对选项逐一分析，由此得出叙述不正确的选项。

【详解】

对于 A 选项，根据折线图可知深圳的变化幅度最小，根据条形图可知北京的平均价格最高，所以 A 选项叙述正确。

对于 B 选项，根据折线图可知天津的往返机票平均价格变化最大，所以 B 选项叙述正确。

对于 C 选项，根据条形图可知上海和广州的往返机票平均价格基本相当，所以 C 选项叙述正确。

对于 D 选项，根据折线图可知相比于上一年同期，除了深圳外，另外五个城市的往返机票平均价格在增加，故 D 选项叙述错误。

故选：D

【点睛】

本小题主要考查根据条形图和折线图进行数据分析，属于基础题。

3、D

【解析】

先分 n 为奇数和偶数两种情况计算出 $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)$ 的值，可进一步得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，然后代入

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12}$ 转化计算，再根据等差数列求和公式计算出结果。

【详解】

解：由题意得，当 n 为奇数时， $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ ，

当 n 为偶数时， $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

所以当 n 为奇数时， $a_n = -n^2$ ；当 n 为偶数时， $a_n = n^2$ ，

所以 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12}$

$$= -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \cdots - 11^2 + 12^2$$

$$= (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \cdots + (12^2 - 11^2)$$

$$= (2+1)(2-1) + (4+3)(4-3) + \cdots + (12+11)(12-11)$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 11 + 12$$

$$= \frac{12 \times (1+12)}{2}$$

$$= 78$$

故选：D

【点睛】

此题考查数列与三角函数的综合问题，以及数列求和，考查了正弦函数的性质应用，等差数列的求和公式，属于中档题。

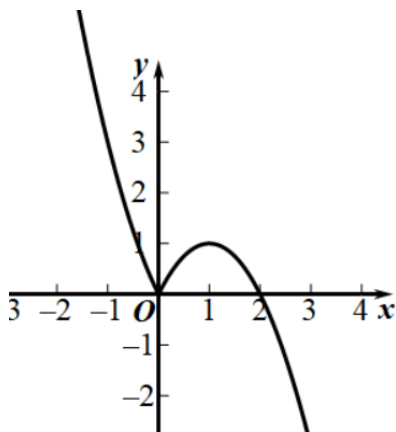
4、D

【解析】

画出函数 $f(x)$ 的图象，利用一元二次不等式解法可得解集，再利用数形结合即可得出。

【详解】

解：函数 $f(x)$ ，如图所示



$$[f(x)]^2 + af(x) < 0 \Rightarrow f(x)(f(x) + a) < 0$$

当 $a > 0$ 时, $-a < f(x) < 0$,

由于关于 x 的不等式 $[f(x)]^2 + af(x) < 0$ 恰有 1 个整数解

因此其整数解为 3, 又 $f(3) = -9 + 6 = -3$

$\therefore -a < -3 < 0$, $-a \geq f(4) = -8$, 则 $3 < a \leq 8$

当 $a = 0$ 时, $[f(x)]^2 < 0$, 则 $a = 0$ 不满足题意;

当 $a < 0$ 时, $0 < f(x) < -a$

当 $0 < -a \leq 1$ 时, $0 < f(x) < -a$, 没有整数解

当 $-a > 1$ 时, $0 < f(x) < -a$, 至少有两个整数解

综上, 实数 a 的最大值为 8

故选: D

【点睛】

本题主要考查了根据函数零点的个数求参数范围, 属于较难题.

5、A

【解析】

由已知新运算 $a \oplus b$ 的意义就是取得 a, b 中的最小值,

$$\text{因此函数 } f(x) = 1 \oplus 2^x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 2^x, & x \leq 0 \end{cases},$$

只有选项 A 中的图象符合要求, 故选 A.

6、C

【解析】

根据①③可判断丙的院校; 由②和⑤可判断丙的学位.

【详解】

由题意①甲不是军事科学院的, ③乙不是军事科学院的;

则丙来自军事科学院;

由②来自军事科学院的不是博士, 则丙不是博士;

由⑤国防科技大学的是研究生, 可知丙不是研究生,

故丙为学士.

综上可知，丙来自军事科学院，学位是学士.

故选：C.

【点睛】

本题考查了合情推理的简单应用，由条件的相互牵制判断符合要求的情况，属于基础题.

7、B

【解析】

先由三角函数的定义求出 $\sin \alpha$ ，再由二倍角公式可求 $\cos 2\alpha$.

【详解】

解：角 α 的终边与单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 交于点 $P\left(\frac{1}{3}, y_0\right)$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3},$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9},$$

故选：B

【点睛】

考查三角函数的定义和二倍角公式，是基础题.

8、D

【解析】

试题分析：Q $m \perp \alpha$ ， $m \parallel n$ ， $\therefore n \perp \alpha$ ， $\because n \subset \beta$ ， $\therefore \alpha \perp \beta$ ，故选 D.

考点：点线面的位置关系.

9、C

【解析】

先求出五个“完全数”随机分为两组，一组 2 个，另一组 3 个的基本事件总数为 $C_5^2 = 10$ ，再求出 6 和 28 恰好在同一组包含的基本事件个数，根据即可求出 6 和 28 不在同一组的概率.

【详解】

解：根据题意，将五个“完全数”随机分为两组，一组 2 个，另一组 3 个，

则基本事件总数为 $C_5^2 = 10$ ，

则 6 和 28 恰好在同一组包含的基本事件个数 $C_2^2 + C_3^1 = 4$ ，

$$\therefore 6 \text{ 和 } 28 \text{ 不在同一组的概率 } P = \frac{10-4}{10} = \frac{3}{5}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查古典概型的概率的求法，涉及实际问题中组合数的应用.

10、D

【解析】

设直线 $l: y = kx + 2$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 由原点 O 在以 PQ 为直径的圆的外部, 可得 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} > 0$, 联立直线 l 与椭圆 C 方程, 结合韦达定理, 即可求得答案.

【详解】

显然直线 $x = 0$ 不满足条件, 故可设直线 $l: y = kx + 2$,

$$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 由 } \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = kx + 2 \end{cases}, \text{ 得 } (1+2k^2)x^2 + 8kx + 6 = 0,$$

$$\Delta = 64k^2 - 24(1+2k^2) > 0,$$

$$\therefore \text{解得 } k > \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 或 } k < -\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8k}{1+2k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{6}{1+2k^2},$$

$$0 < \angle POQ < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} > 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + (kx_1 + 2)(kx_2 + 2)$$

$$= (1+k^2)x_1 x_2 + 2k(x_1 + x_2) + 4 = \frac{6(1+k^2)}{1+2k^2} - \frac{16k^2}{1+2k^2} + 4 = \frac{10-2k^2}{1+2k^2} > 0,$$

$$\therefore \text{解得 } -\sqrt{5} < k < \sqrt{5},$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的斜率 } k \text{ 的取值范围为 } k \in \left(-\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{5}\right).$$

故选：D.

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/996112010040010232>