

山东省日照市2024届高三下学期校际联考（二模）数学试卷

学校：_____ 姓名：_____ 班级：_____ 考号：_____

一、选择题

1. 已知幂函数图象过点 $(2,4)$ ，则函数的解析式为()

- A. $y = 2^x$ B. $y = x^2$ C. $y = \log_2 x$ D. $y = \sin x$

2. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ，则“ $a > b$ ”是“ $a^3 > b^3$ ”的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 $(x+a)^5 = p_5x^5 + p_4x^4 + p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0$ ，若 $p_4 = 15$ ，则 $a = ()$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 已知 $a = \log_2 1.41$ ， $b = 1.7^{0.3}$ ， $c = \cos \frac{7\pi}{3}$ ，则()

- A. $b > a > c$ B. $b > c > a$
C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，首项 $a_1 = 3$ ，且数列 $\{\log_3 a_n\}$ 是以-2为公差的等差数列，则 $a_3 = ()$

- A. $\frac{1}{27}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. 9

6. 已知棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，以正方体中心为球心的球 O 与正方体的各条棱相切，若点 P 在球 O 的正方体外部（含正方体表面）运动，则 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 的最大值为()

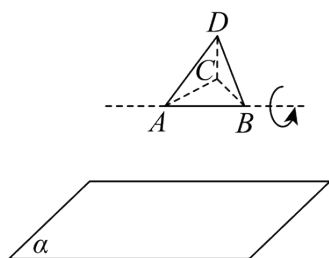
- A. 2 B. $\frac{7}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

7. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数， $f(5.5) = 4$ ， $g(x) = (x-1)f(x)$ ，若 $g(x+1)$ 是偶函数，则 $g(-0.5) = ()$

- A. -6 B. -4 C. 4 D. 6

8. 如图，已知四面体 $ABCD$ 的棱 $AB \parallel$ 平面 α ，且 $AB = 2$ ，其余的棱长均为 $\sqrt{2}$.四面体 $ABCD$ 以 AB 所在的直线为轴旋转 x 弧度，且四面体 $ABCD$ 始终在水平放置的平面 α 的上方. 如果将四面体 $ABCD$ 在平面 α 内正投影面积看成关于 x 的函数，记为 $S(x)$

，则函数 $S(x)$ 的最小正周期与 $S(x)$ 取得最小值时平面 ABC 与平面 α 所成角分别为()



- A. $2\pi, 0$ B. $\pi, \frac{\pi}{2}$ C. $2\pi, \frac{\pi}{2}$ D. $\pi, \frac{\pi}{4}$

二、多项选择题

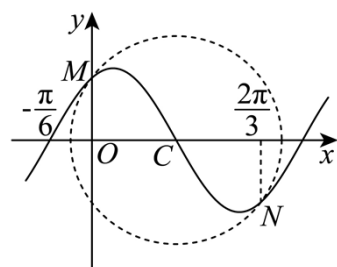
9. 同时投掷甲、乙两枚质地均匀的硬币，记“甲正面向上”为事件 A ，“乙正面向上”为事件 B ，“甲、乙至少一枚正面向上”为事件 C ，则下列判断正确的是()

A. A 与 B 相互独立 B. A 与 B 互斥

C. $P(B|C) = \frac{2}{3}$

D. $P(C) = \frac{1}{2}$

10. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分图象如图中实线所示，图中圆 C 与 $f(x)$ 的图象交于 M, N 两点，且 M 在 y 轴上，则下列命题正确的是()



A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π

B. 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减

C. 函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

D. 若圆 C 的半径为 $\frac{5\pi}{12}$ ，则 $f(x) = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

11. 已知 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ 是曲线 $C: 7x^2 - 6y + 6y^2 + |x^2 + 6y - 3| = 21$ 上不同的两点， O 为坐标原点，则()

A. $x_1^2 + y_1^2$ 的最小值为3

B. $2 \leq \sqrt{x_1^2 + (y_1 - 1)^2} + \sqrt{x_1^2 + (y_1 + 1)^2} \leq 4$

C. 若直线 $y = kx + 3$ 与曲线 C 有公共点, 则 $k \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{15}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{15}}{3}, +\infty\right)$

D. 对任意位于 y 轴左侧且不在 x 轴上的点 P , 都存在点 Q , 使得曲线 C 在 P, Q 两点处的切线垂直

三、填空题

12. 设 $m \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位. 若集合 $A = \{1, 2m + (m-1)i\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 且 $A \subseteq B$, 则 $m =$ _____.

13. 已知 x 轴为函数 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$ 的图像的一条切线, 则实数 a 的值为_____.

14. “-1, 0, 1 序列”在通信技术中有着重要应用, 该序列中的数取值于-

1, 0 或 1. 设 A 是一个有限“-1, 0, 1 序列”, $f(A)$ 表示把 A 中每个 -1 都变为-

1, 0, 每个 0 都变为 -1, 1, 每个 1 都变为 0, 1, 得到新的有序实数组. 例如:

$A = (-1, 0, 1)$, 则 $f(A) = (-1, 0, -1, 1, 0, 1)$. 定义 $A_{k+1} = f(A_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, 若

$A_1 = (-1, 1)$, A_n 中 1 的个数记为 b_n , 则 $\{b_n\}$ 的前 10 项和为_____.

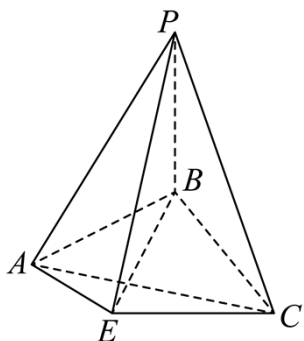
四、解答题

15. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 分别以 a, b, c 为边长的正三角形的面积依次为 S_1, S_2, S_3 , 且 $S_1 - S_2 - S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}bc$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $\overline{BD} = 4\overline{CD}$, $\angle CAD = \frac{\pi}{6}$, 求 $\sin \angle ACB$.

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $BA \perp BC$, $PB \perp$ 平面 ABC , 点 E 在平面 ABC 内, 且满足平面 $PAE \perp$ 平面 PBE , $AB = BC = BP = 1$.



(1)求证: $AE \perp BE$;

(2)当二面角 $E-PA-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 求三棱锥 $E-PCB$ 的体积.

17. 某公司为考核员工, 采用某方案对员工进行业务技能测试, 并统计分析测试成绩以确定员工绩效等级.

(1)已知该公司甲部门有3名负责人, 乙部门有4名负责人, 该公司从甲、乙两部门中随机选取3名负责人做测试分析, 记负责人来自甲部门的人数为 X , 求 X 的最有可能的取值:

(2)该公司统计了七个部门测试的平均成绩 x (满分100分) 与绩效等级优秀率 y , 如下表所示:

x	32	41	54	68	74	80	92
y	0.28	0.34	0.44	0.58	0.66	0.74	0.94

根据数据绘制散点图, 初步判断, 选用 $y = \lambda e^{cx}$ 作为回归方程. 令 $z = \ln y$, 经计算得

$$\bar{z} = -0.642, \quad \frac{\sum_{i=1}^7 x_i z_i - 7\bar{x}\bar{z}}{\sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7\bar{x}^2} \approx 0.02$$

(i) 已知某部门测试的平均成绩为60分, 估计其绩效等级优秀率;

(ii) 根据统计分析, 大致认为各部门测试平均成绩 $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$, σ^2 近似为样本方差 s^2 . 经计算 $s \approx 20$, 求某个部门绩效等级优秀率不低于0.78的概率.

参考公式与数据: ① $\ln 0.15 \approx -1.9, e^{1.2} \approx 3.32, \ln 5.2 \approx 1.66$.

②线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$.

③若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$,

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$, $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9974$.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为

$F(-\sqrt{2}, 0)$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)已知直线 l 与椭圆 C 相切, 与圆 $O: x^2 + y^2 = 3a^2$ 相交于 A, B 两点, 设 P 为圆 O 上任意一点, 求 $\triangle PAB$ 的面积最大时直线 l 的斜率.

19. 已知函数 $f(x) = \sin x$, $g(x) = x \cos x - \sin x$.

(1)判断函数 $g(x)$ 在区间 $(0, 3\pi)$ 上的零点个数, 并说明理由;

(2)函数 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在区间 $(0, (n+1)\pi) (n \in \mathbf{N}^*)$ 上的所有极值之和为 $M(n)$, 证明: 对

于 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $M(n) < 0$.

参考答案

1. 答案 : B

解析: 设幂函数的解析式为 $y = x^\alpha$, 由于函数过点 $(2, 4)$, 故 $4 = 2^\alpha$, 解得 $\alpha = 2$, 该幂函数的解析式为 $y = x^2$;

故选: B

2. 答案 : C

解析: 因为函数 $y = x^3$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

所以由 $a > b$ 推得出 $a^3 > b^3$, 故充分性成立;

由 $a^3 > b^3$ 推得出 $a > b$, 故必要性成立,

所以“ $a > b$ ”是“ $a^3 > b^3$ ”的充要条件.

故选: C

3. 答案 : C

解析: 由 $(x+a)^5 = p_5x^5 + p_4x^4 + p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0$, 且 $p_4 = 15$,

可得 $C_5^1 x^4 \cdot a = 15$, 解得 $a = 3$.

故选: C.

4. 答案 : B

解析: 因为 $b = 1.7^{0.3} > 1$, $c = \cos \frac{7\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{2} > a = \log_2 1.41$,

所以 $b > c > a$,

故选: B.

5. 答案 : A

解析: 因为数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数, 首项 $a_1 = 3$, 则 $\log_3 a_1 = 1$,

又数列 $\{\log_3 a_n\}$ 是以 -2 为公差的等差数列,

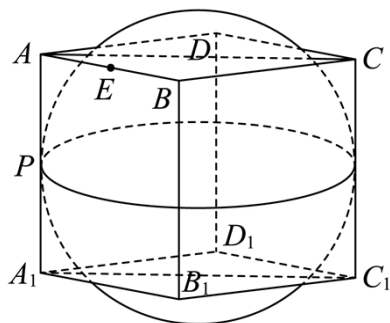
则 $\log_3 a_3 = 1 - 2 \times (3 - 1) = -3$, 故 $a_3 = 3^{-3} = \frac{1}{27}$

故选: A

6. 答案 : B

解析: 取 AB 中点 E , 可知 E 在球面上, 可得 $\overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{EA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EA}) \cdot (\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EB}) = (\overrightarrow{PE})^2 - (\overrightarrow{EA})^2 = PE^2 - \frac{1}{4},$$



点 P 在球 O 的正方体外部（含正方体表面）运动，当 PE 为直径时， $|\overrightarrow{PE}|_{\max} = \sqrt{2}$ ，

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最大值为 $\frac{7}{4}$ 。

故选：B.

7. 答案：D

解析：因为 $g(x+1)$ 是偶函数，

所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，

即 $g(x) = g(2-x)$ ，

即 $(x-1)f(x) = (1-x)f(2-x)$ ，

所以 $f(x) + f(2-x) = 0$ 。

所以 $f(x)$ 关于点 $(1,0)$ 中心对称。

又 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，

所以 $f(x) = -f(2-x) = -f(x-2)$ ，

所以 $f(x-4) = f((x-2)-2) = -f(x-2) = -(-f(x)) = f(x)$ ，

即 $f(x-4) = f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 的周期为4。

所以 $f(5.5) = f(1.5) = f(-2.5) = f(2.5) = 4$ ，

所以 $g(-0.5) = g(2.5) = 1.5f(2.5) = 6$ 。

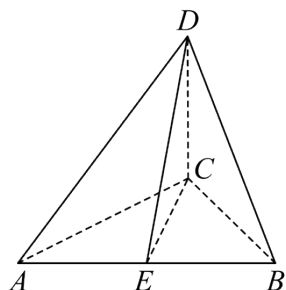
故选：D.

8. 答案：D

解析：设过 AB 且平行于平面 α 的平面为 β ，

由题意知，四面体 $ABCD$ 在平面 β 的上方时和下方时完全对称，故函数 $S(x)$ 的周期为 π 。

取 AB 中点 E ，连接 CE 、 DE ，如图，



Q $AB=2$ ， $AC=BC=\sqrt{2}$ $\therefore AB^2=AC^2+BC^2$ ， $\therefore AC \perp BC$ ，

Q $AB=2$ ， $AD=BD=\sqrt{2}$ ， $\therefore AB^2=AD^2+BD^2$ ， $\therefore AD \perp BD$ ，

则 $CE=DE=1$ ，而 $CD=\sqrt{2}$ ，故 $CE^2+DE^2=CD^2$ ， $CE \perp DE$ ，

所以 E 到 CD 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

又 $DE \perp AB$ ， $AB \cap CE = E$ ， $AB, CE \subset$ 平面 ABC ，所以 $DE \perp$ 平面 ABC ，

则 $\angle DCE$ 为直线 DC 与平面 ABC 所成的角，又 $\angle DCE = \frac{\pi}{4}$ ，

所以直线 DC 与平面 ABC 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$ ，

Q $AD=BD$ ， $AC=BC$ ， E 为 AB 中点，

$\therefore AB \perp CE$ ， $AB \perp DE$ ，又 $DE \cap CE = E$ ， DE, CE 在平面内，则 $AB \perp$ 面 CDE ，

又 $DE \subset$ 面 CDE ，则 $AB \perp DE$ ，

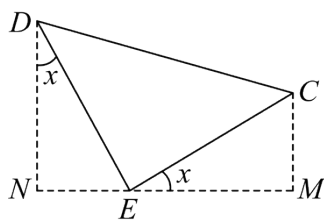
Q $CE \perp DE$ ， $AB \perp DE$ ， $CE \cap AB = E$ ， CE, AB 在平面内，则 $DE \perp$ 面 ABC ，

又 $DE \subset$ 面 ABD ，则面 $ABD \perp$ 面 ABC ，

设 CD 在平面 β 的投影为 MN ，可得 $MN \perp AB$ 。

下面讨论一个周期内的情形：

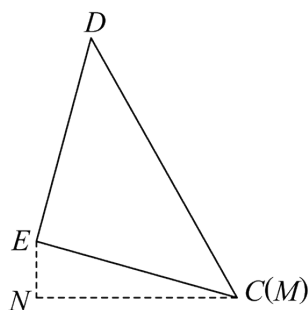
当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，如图，



$$S(x) = \frac{1}{2} AB \cdot MN = \frac{1}{2} \times 2 \times 1(\cos x + \sin x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{Q } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], \quad \text{则 } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1, \quad \text{故 } S(x)_{\min} = 1.$$

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 时, 如图,



QE 到 CD 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore MN \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 当 $CD \perp \alpha$ 时等号成立,

$$S(x) = \frac{1}{2} AB \cdot MN \geq \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{即 } S(x)_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

综上所述, $S(x)_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 此时 $CD \perp \alpha$, 又直线 DC 与平面 ABC 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$,

所以平面 α 与平面 ABC 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$.

故选: D.

9. 答案: AC

解析: 对于 A, 依题意 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(AB) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$,

所以事件 A 与事件 B 相互独立, 故 A 正确;

对于 B, 由题意可知, 事件 A 与事件 B 有可能同时发生,

例如“甲正面向上且乙正面向上”, 故事件 A 与事件 B 不是互斥事件, 故 B 错误;

对于 C、D, $P(C) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, 因为 $B \subset C$, 所以 $P(BC) = P(B) = \frac{1}{2}$,

所以 $P(B|C) = \frac{P(BC)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$, 故C正确, D错误.

故选: AC.

10. 答案: ACD

解析: A选项, 由对称性可知C点的横坐标为 $\frac{0 + \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$,

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 则 $\frac{1}{2}T = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$, 解得 $T = \pi$, A正确;

B选项, 因为 $\omega > 0$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

点 $\left(\frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}}{2}, A\right)$ 在图象上, 即点 $\left(\frac{\pi}{12}, A\right)$ 在图象上, 将其代入函数解析式得

$$A \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = A,$$

又 $0 < \varphi < \pi$, 故 $\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2}$, 解得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

$$\text{故 } f(x) = A \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

当 $-\frac{7\pi}{12} < x < -\frac{\pi}{3}$ 时, $-\frac{5\pi}{6} < 2x + \frac{\pi}{3} < -\frac{\pi}{3}$,

又 $A > 0$, $y = \sin z$ 在 $z \in \left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right)$ 上不单调,

故函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}\right)$ 上不单调递减, B错误;

C选项, 函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后得到

$$g(x) = A \sin\left(2x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = A \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = A \cos 2x,$$

其中 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = A \cos \pi = -A$, 故 $g(x)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, C正确;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/997013061161006113>