

重庆 2024—2025 学年度（下）高三年级入学测试

数学试题（答案在最后）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 已知集合 $A = \{-2, 0, 2, 4\}$, $B = \{x | x^2 - 4x < 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{2\}$ B. $\{0, 2\}$ C. $\{0, 2, 4\}$ D. $\{-2, 0, 2\}$

2. 已知 $\frac{z+1}{2z} = 1+i$, 则 $|z| =$ ()

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

3. 已知向量 $\vec{a} = (-2, m)$, $\vec{b} = (1, 2)$, $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = \frac{11}{2}$, 则实数 m 的值为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -1

4. 若锐角 α, β 满足 $3\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta$, 则 $\tan(\alpha + \beta)$ 的最小值为 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{6}$

5. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_4 = -5$, $S_6 = 21S_2$, 则 $S_8 =$ ().

- A. 120 B. 85 C. -85 D. -120

6. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}}, & 0 < x < m \\ x^{\frac{1}{2}}, & x \geq m \end{cases}$, 若存在实数 t 使得方程 $f(x) = t$ 有两个不同的正实数根, 则

正实数 m 的取值范围为 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(0, 1)$ D. $(0, 1]$

7. 已知圆台的上底面半径为 1, 一个表面积为 20π 的球与该圆台的上下底面及其侧面都相切, 则该圆台的体积为 ()

- A. $4\sqrt{5}\pi$ B. $\frac{13\sqrt{5}}{3}\pi$ C. $\frac{31\sqrt{5}}{3}\pi$ D. $\frac{62\sqrt{5}}{3}\pi$

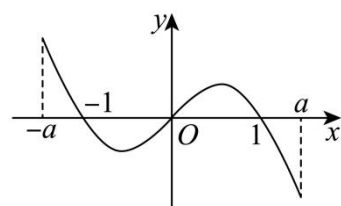
8. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $y = f(x)$ 满足 $f(f(x)) = x$, 但 $f(x)$ 不恒等于 x , 则下列说法正确的是 ()

- A. $f(x)$ 可以是 $\mathbb{R}$ 上单调递增的一次函数 B. $f(x)$ 可以是偶函数
C. $f(x)$ 可以是奇函数 D. $f(x)$ 可以是周期函数

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)$, $x \in [-a, a]$ 的图象是一条连续不断的曲线，设其导数为 $f'(x)$ ，函数

$g(x) = (x^2 - x)f'(x)$ 的图象如下，则下列说法正确的是 ()



- A. $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取最大值 B. $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极大值点
C. $f(x)$ 没有极小值点 D. $x = 1$ 可能不是导函数 $f'(x)$ 的极大值点

10. 某农科所针对耕种深度 x (单位: cm) 与水稻每公顷产量 (单位: t) 的关系进行研究，所得部分数据如下表：

耕种深度 x/cm	8	10	12	14	16	18
每公顷产量 y/t	6	8	m	n	11	12

已知 $m < n$ ，用最小二乘法求出 y 关于 x 的经验回归方程： $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ， $\sum_{i=1}^6 y_i^2 = 510$ ，

$\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2 = 24$ ，数据在样本 $(12, m)$ ， $(14, n)$ 的残差分别为 ε_1 ， ε_2 。

(参考数据：两个变量 x ， y 之间的相关系数 r 为 $\sqrt{\frac{20}{21}}$ ，参考公式： $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ，

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x}$ ， $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$) 则 ()

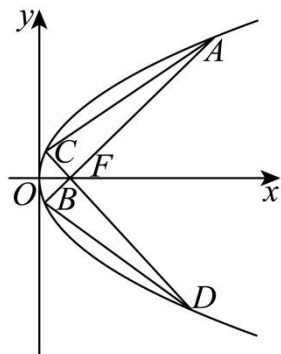
A. $m+n=17$

B. $\hat{b}=\frac{4}{7}$

C. $\hat{a}=\frac{10}{7}$

D. $\varepsilon_1+\varepsilon_2=-1$

11. 如图，过抛物线 $E: y^2=4x$ 的焦点作两条直线 l_1, l_2 ， l_1 与 E 相交于 C, D 两点， l_2 与 E 相交于 A, B ，则下列说法中正确的是（ ）



A. 若点 $G(3,2)$ ，则 $\triangle GFC$ 周长的最小值为 $4+2\sqrt{2}$

B. $2|CF|+|DF|$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$

C. 若 $l_1 \perp l_2$ ，则四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 32

D. 若 BC 过定点 $(\frac{1}{2}, 0)$ ，则 AD 过定点 $(4, 0)$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知圆 $C_1: x^2+y^2=b^2$ ($b>0$) 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)，若过双曲线 C_2 右顶点 P 作圆 C_1 的两条切线，切点为 A, B ，且 $\angle APB=\frac{\pi}{3}$ ，则双曲线 C_2 的离心率是_____.

13. 已知函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导且 $f(0)=-6$ ，其导函数 $f'(x)$ 满足： $\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}=2x-1$ ，则 $f(x)<0$ 的解集为_____.

14. 甲、乙、丙、丁、戊五人完成 A, B, C, D, E 五项任务所获得的效益如下表：

	A	B	C	D	E
甲	10	12	9	12	10
乙	24	25	23	22	22
丙	9	13	14	12	10

丁	6	8	10	8	10
戊	13	15	14	15	11

现每项任务指派一人完成,其中甲不承担 C 任务,丁不承担 A 任务的指派方法数有_____种;
效益之和的最大值是_____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

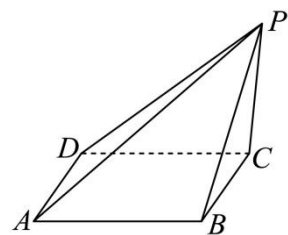
15. 在 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 满足

$$2\cos^2 \frac{C}{2} = 1 - \cos A \cos B + 2\sqrt{2} \sin A \cos B.$$

(1) 求 $\cos B$ 的值;

(2) 设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R , 且 $R(\sin A + \sin C) = 1$, 求 b 的取值范围.

16. 如图, 在底面为正方形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle PAB = 60^\circ$, $\angle PAD = 45^\circ$, $PA = 2AD = 2$.



(1) 求证: 平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求平面 PAB 与平面 PAD 所成二面角的正弦值.

17. 在平面直角坐标系中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, 过点 F_2 作 x 轴的垂线. 垂线与椭圆交于 P, Q , 且 $\triangle PF_1Q$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}ab$.

(1) 求椭圆 C 的离心率 e ;

(2) 已知 $a < \sqrt{2}c$, 直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 且 AB 中点为 $N\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, 若椭圆 C 上存在点 M , 满足 $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{ON} + 4\overrightarrow{OM}$, 求椭圆 C 的方程.

18. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + x - a \sin x$, $a > 0$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调增, 求实数 a 的取值范围;

(2) 当 $x \in \left(-1, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, $f(x) \leq 0$, 求实数 a 的值;

(3) 求证: $2 \sum_{k=2}^n \sin\left(\frac{1}{k^2-1}\right) > \frac{3}{4} + \ln 2 + \ln \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n}$.

19. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, 且存在正整数 k , 使得 a_n 为奇数时, $a_{n+1}=a_n+2k-1$; a_n 为偶数时, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$, 称 $\{a_n\}$ 为 k —跳跃数列, 记 $d(i,j)=|a_i-a_j|$.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 为 k —跳跃数列, 且对任意 $1 \leq i < j \leq 6, d(i,j) \neq 0$, 求 k 最小时 $d(i,j)$ 的最大值;

(2) 已知 m 为正整数, 数列 $\{a_n\}$ 为 2^{m-1} —跳跃数列.

① 若 $m=10$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 60 项的和;

② 求 $d(i,j)$ 的所有不同值的和 T .

1. A

【分析】先解一元二次不等式，再应用交集定义计算求解.

【详解】因为 $B = \{x | x^2 - 4x < 0\} = \{x | 0 < x < 4\}$ ，则 $A \cap B = \{2\}$.

故选：A.

2. D

【分析】根据复数的乘除法运算及复数相等的概念求解.

【详解】设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$,

由 $\frac{z+1}{2z} = 1+i$ ，得 $\frac{a+bi+1}{2a+2bi} = 1+i$ ，即 $a+1+bi = (1+i)(2a+2bi)$,

所以 $a+1+bi = 2a-2b+(2a+2b)i$,

所以 $\begin{cases} a+1=2a-2b \\ b=2a+2b \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a=\frac{1}{5} \\ b=-\frac{2}{5} \end{cases}$ ，

所以 $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

故选：D.

3. C

【解析】先根据平面向量的线性坐标运算法则表示出 $2\vec{a} + \vec{b}$ ，再根据数量积的坐标运算法则表示出 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$ ，从而得到关于 m 的方程，解之即可.

【详解】解： $\because \vec{a} = (-2, m)$ ， $\vec{b} = (1, 2)$ ， $\therefore 2\vec{a} + \vec{b} = (-3, 2m+2)$ ，

$\therefore \vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 6 + m(2m+2) = \frac{11}{2}$ ，即 $m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$ ，解得 $m = -\frac{1}{2}$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查平面向量的坐标运算，熟练掌握平面向量的运算法则是解题的关键，考查学生的运算能力，属于基础题.

4. D

【分析】利用两角和的余弦公式得 $\tan \alpha \tan \beta$ ，再由基本不等式求得 $\tan(\alpha + \beta)$ 的最小值.

【详解】 $3\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta \Rightarrow 3\cos \alpha \cos \beta - 3\sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta \Rightarrow \tan \alpha \tan \beta = \frac{2}{3}$.

于是 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 3 (\tan \alpha + \tan \beta) \geq 6 \sqrt{\tan \alpha \tan \beta} = 2\sqrt{6}$ ，当且仅当

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/997031060153010041>