

2024 届云南省红河市重点中学高三高考适应性月考数学试题（一）

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z 满足 $|z|=1$ ，则 $|z-i|$ （其中 i 为虚数单位）的最大值为（ ）
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. 在复平面内，复数 $z = \frac{2-i}{i}$ （ i 为虚数单位）对应的点位于（ ）
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F ，直线 l 经过点 F 且与双曲线的一条渐近线垂直，直线 l 与双曲线的左支交于不同的两点 A, B ，若 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$ ，则该双曲线的离心率为（ ）.
A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$
4. 在直角梯形 $ABCD$ 中， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ ， $BC = 2$ ，点 E 为 BC 上一点，且 $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ ，当 xy 的值最大时， $|\overrightarrow{AE}| =$ （ ）
A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $\frac{\sqrt{30}}{2}$ D. $2\sqrt{3}$
5. 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过点 F_1 作圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的切线，与双曲线的左、右两支分别交于点 P, Q ，若 $|QF_2| = |PQ|$ ，则双曲线渐近线的斜率为（ ）
A. ± 1 B. $\pm(\sqrt{3}-1)$ C. $\pm(\sqrt{3}+1)$ D. $\pm\sqrt{5}$
6. 已知关于 x 的方程 $\sqrt{3}\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = m$ 在区间 $[0, 2\pi)$ 上有两个根 x_1, x_2 ，且 $|x_1 - x_2| \geq \pi$ ，则实数 m 的取值范围是（ ）
A. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ B. $[1, 2)$ C. $[0, 1)$ D. $[0, 1]$
7. 两圆 $(x+a)^2 + y^2 = 4$ 和 $x^2 + (y-b)^2 = 1$ 相外切，且 $ab \neq 0$ ，则 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 的最大值为（ ）

- A. $\frac{9}{4}$ B. 9 C. $\frac{1}{3}$ D. 1

8. 已知函数 $f(x) = ax^2 - x + \ln x$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 ，若不等式 $f(x_1) + f(x_2) > 2(x_1 + x_2) + t$ 有解，则 t 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2\ln 2)$ B. $(-\infty, -2\ln 2]$
C. $(-\infty, -11 + 2\ln 2)$ D. $(-\infty, -11 + 2\ln 2]$

9. 已知 i 为虚数单位，若复数 $z_1 = 2 + i$ ， $z \cdot z_1 = 5$ ，则 $|z| =$

- A. 1 B. $\sqrt{5}$
C. 5 D. $5\sqrt{5}$

10. 已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - ac)x$ 存在极值，则角 B 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{\pi}{3})$ B. $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ C. $(\frac{\pi}{3}, \pi)$ D. $(\frac{\pi}{6}, \pi)$

11. 设 $a = \log_2 3$ ， $b = \log_4 6$ ， $c = 5^{-0.1}$ ，则 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

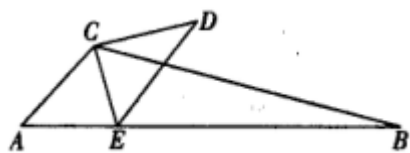
12. $\left| \frac{i^{2020}}{1-i} \right| =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{4}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

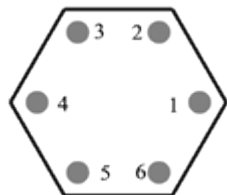
13. 双曲线 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦距为_____，渐近线方程为_____.

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 2$ ， $AB = \sqrt{6}$ ， $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$ ，点 E 在边 AB 上，且 $\angle ACE = \angle BCE$ ，将射线 CB 绕着 C 逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{6}$ ，并在所得射线上取一点 D ，使得 $CD = \sqrt{3} - 1$ ，连接 DE ，则 $\triangle CDE$ 的面积为_____.



15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & x > 2, \end{cases}$ 函数 $g(x) = b - f(2-x)$, 其中 $b \in R$, 若函数 $y = f(x) - g(x)$ 恰有 4 个零点, 则 b 的取值范围是_____.

16. 工人在安装一个正六边形零件时, 需要固定如图所示的六个位置的螺栓. 若按一定顺序将每个螺栓固定紧, 但不能连续固定相邻的 2 个螺栓. 则不同的固定螺栓方式的种数是_____.



三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知命题 $P: \forall x \in R, x^2 - x + m > 0$; 命题 Q : 函数 $f(x) = \ln x - \frac{m}{2}x$ 无零点.

(1) 若 $\neg q$ 为假, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 $p \wedge q$ 为假, $p \vee q$ 为真, 求实数 m 的取值范围.

18. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(1, \frac{3}{2})$ 且椭圆的左、右焦点与短轴的端点构成的四边形的面积为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 A 是椭圆的左顶点, 过右焦点 F 的直线 l_1 , 与椭圆交于 P, Q , 直线 AP, AQ 与直线 $l_2: x = 4$ 交于 M, N , 线段 MN 的中点为 E .

①求证: $EF \perp PQ$;

②记 $\triangle VPQE, \triangle PME, \triangle VONE$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 求证: $\frac{S_1}{S_2 + S_3}$ 为定值.

19. (12 分) 每年 3 月 20 日是国际幸福日, 某电视台随机调查某一社区人们的幸福度. 现从该社区群中随机抽取 18 名, 用“10 分制”记录了他们的幸福度指数, 结果见如图所示茎叶图, 其中以小数点前的一位数字为茎, 小数点后的一位数字为叶. 若幸福度不低于 8.5 分, 则称该人的幸福度为“很幸福”.

幸福度	
7	3 0
8	2 1 4 3 9 8 5 6 7 5
9	7 5 6 5 4 3

(I) 求从这 18 人中随机选取 3 人, 至少有 1 人是“很幸福”的概率;

(II)以这 18 人的样本数据来估计整个社区的总体数据,若从该社区(人数很多)任选 3 人,记 X 表示抽到“很幸福”的人数,求 X 的分布列及 $E(X)$.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = 1 - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 2\cos^2 x + m$ 在 R 上的最大值为 3.

(1) 求 m 的值及函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若锐角 $\triangle ABC$ 中角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 且 $f(A) = 0$, 求 $\frac{b}{c}$ 的取值范围.

21. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 点 P 的坐标为 $(a, \sqrt{3}a)$, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = a + \frac{1}{2}t, \\ y = \sqrt{3}a + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数, } a \text{ 为常数, 且 } a > 0)$$

.以直角坐标系的原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 且两个坐标系取相等的长度单位, 建立极坐标系, 圆 C 的极坐标方程为 $\rho = 2$. 设点 P 在圆外.

(1) 求 a 的取值范围.

(2) 设直线 l 与圆 C 相交于 A, B 两点, 若 $|PA| = |AB|$, 求 a 的值.

22. (10 分) 设函数 $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \ln x$,

(I) 求曲线 $y = f(2x-1)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $y = f(x) \cdot g(x)$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e]$ 上的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

根据复数的几何意义可知复数 z 对应的点在以原点为圆心, 1 为半径的圆上, 再根据复数的几何意义即可确定 $|z-i|$,

即可得 $|z-i|$ 的最大值.

【详解】

由 $|z|=1$ 知, 复数 z 对应的点在以原点为圆心, 1 为半径的圆上,

$|z-i|$ 表示复数 z 对应的点与点 $(0,1)$ 间的距离,

又复数 z 对应的点所在圆的圆心到 $(0,1)$ 的距离为 1,

所以 $|z-i|_{\max}=1+1=2$.

故选: B

【点睛】

本题考查了复数模的定义及其几何意义应用, 属于基础题.

2、C

【解析】

化简复数为 $a+bi$ ($a, b \in R$) 的形式, 可以确定 z 对应的点位于的象限.

【详解】

解: 复数 $z = \frac{2-i}{i} = \frac{(2-i)i}{i^2} = -(2i-i^2) = -1-2i$

故复数 z 对应的坐标为 $(-1, -2)$ 位于第三象限

故选: C.

【点睛】

本题考查复数代数形式的运算, 复数和复平面内点的对应关系, 属于基础题.

3、A

【解析】

直线 l 的方程为 $x = \frac{b}{a}y - c$, 令 $a=1$ 和双曲线方程联立, 再由 $\overline{AF} = 2\overline{FB}$ 得到两交点坐标纵坐标关系进行求解即可.

【详解】

由题意可知直线 l 的方程为 $x = \frac{b}{a}y - c$, 不妨设 $a=1$.

则 $x = by - c$, 且 $b^2 = c^2 - 1$

将 $x = by - c$ 代入双曲线方程 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中, 得到 $(b^4 - 1)y^2 - 2b^3cy + b^4 = 0$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

则 $y_1 + y_2 = \frac{2b^3c}{b^4 - 1}, y_1 \cdot y_2 = \frac{b^4}{b^4 - 1}$

$$\text{由 } \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}, \text{ 可得 } y_1 = -2y_2, \text{ 故 } \begin{cases} -y_2 = \frac{2b^3c}{b^4-1} \\ -2y_2^2 = \frac{b^4}{b^4-1} \end{cases}$$

$$\text{则 } 8b^2c^2 = 1 - b^4, \text{ 解得 } b^2 = \frac{1}{9}$$

$$\text{则 } c = \sqrt{b^2 + 1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{所以双曲线离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

故选：A

【点睛】

此题考查双曲线和直线相交问题，联立直线和双曲线方程得到两交点坐标关系和已知条件即可求解，属于一般性题目.

4、B

【解析】

由题，可求出 $AD=1, CD=\sqrt{3}$ ，所以 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$ ，根据共线定理，设 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}(0, \lambda, 1)$ ，利用向量三角形法则求

出 $\overrightarrow{AE}=\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$ ，结合题给 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$ ，得出 $x=1-\frac{\lambda}{2}, y=\lambda$ ，进而得出 $xy=\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\lambda$ ，最后

利用二次函数求出 xy 的最大值，即可求出 $|\overrightarrow{AE}|$ 。

【详解】

由题意，直角梯形 $ABCD$ 中， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ ， $BC = 2$ ，

可求得 $AD=1, CD=\sqrt{3}$ ，所以 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$ 。

∵点 E 在线段 BC 上，设 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}(0, \lambda, 1)$ ，

则 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$

$= (1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DC}=\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$ ，

即 $\overrightarrow{AE}=\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$ ，

又因为 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$

所以 $x = 1 - \frac{\lambda}{2}, y = \lambda$,

$$\text{所以 } xy = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\lambda = -\frac{1}{2}[(\lambda - 1)^2 - 1] = -\frac{1}{2}(\lambda - 1)^2 + \frac{1}{2},$$

当 $\lambda = 1$ 时, 等号成立.

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AE}| = \left| \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right| = 2.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查平面向量线性运算中的加法运算、向量共线定理, 以及运用二次函数求最值, 考查转化思想和解题能力.

5、C

【解析】

如图所示: 切点为 M , 连接 OM , 作 $PN \perp x$ 轴于 N , 计算 $|PF_1| = 2a$, $|PF_2| = 4a$, $|PN| = \frac{2a^2}{c}$, $|F_1N| = \frac{2ab}{c}$,

根据勾股定理计算得到答案.

【详解】

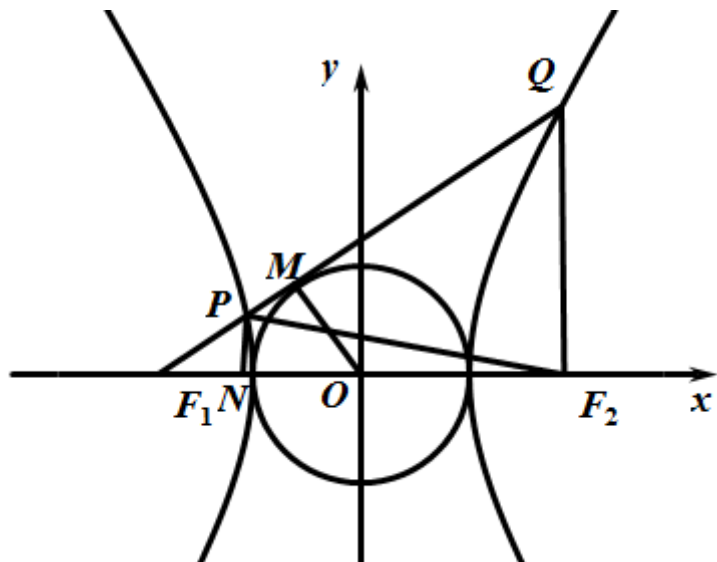
如图所示: 切点为 M , 连接 OM , 作 $PN \perp x$ 轴于 N ,

$$|QF_1| - |QF_2| = |QP| + |PF_1| - |QF_2| = |PF_1| = 2a, \text{ 故 } |PF_2| = 4a,$$

$$\text{在 } Rt\triangle MOF_1 \text{ 中, } \sin \angle MF_1O = \frac{a}{c}, \text{ 故 } \cos \angle MF_1O = \frac{b}{c}, \text{ 故 } |PN| = \frac{2a^2}{c}, |F_1N| = \frac{2ab}{c},$$

$$\text{根据勾股定理: } 16a^2 = \frac{4a^4}{c^2} + \left(2c - \frac{2ab}{c}\right)^2, \text{ 解得 } \frac{b}{a} = \sqrt{3} + 1.$$

故选: C.



【点睛】

本题考查了双曲线的渐近线斜率，意在考查学生的计算能力和综合能力.

6、C

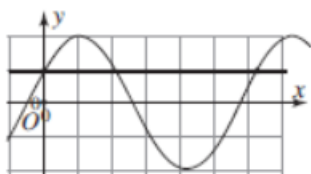
【解析】

先利用三角恒等变换将题中的方程化简，构造新的函数 $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$ ，将方程的解的问题转化为函数图象的交点问题，画出函数图象，再结合 $|x_1 - x_2| \geq \pi$ ，解得 m 的取值范围.

【详解】

由题化简得 $\sqrt{3}\sin x + \cos x = m$ ， $m = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$ ，

作出 $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$ 的图象，



又由 $|x_1 - x_2| \geq \pi$ 易知 $0 \leq m < 1$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了三角恒等变换，方程的根的问题，利用数形结合法，求得范围.属于中档题.

7、A

【解析】

由两圆相外切，得出 $a^2 + b^2 = 9$ ，结合二次函数的性质，即可得出答案.

【详解】

因为两圆 $(x+a)^2 + y^2 = 4$ 和 $x^2 + (y-b)^2 = 1$ 相外切

所以 $\sqrt{a^2 + b^2} = 3$ ，即 $a^2 + b^2 = 9$

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2(9 - a^2)}{9} = \frac{-\left(a^2 - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{4}}{9}$$

当 $a^2 = \frac{9}{2}$ 时， $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ 取最大值 $\frac{81}{4} \times \frac{1}{9} = \frac{9}{4}$

故选：A

【点睛】

本题主要考查了由圆与圆的位置关系求参数，属于中档题.

8、C

【解析】

先求得 $f'(x) = \frac{2ax^2 - x + 1}{x}$ ($x > 0$)，由于函数 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 ，转化为方程 $2ax^2 - x + 1 = 0$

有两个不相等的正实数根，根据 Δ ， $x_1 + x_2$ ， $x_1 \cdot x_2$ ，求出 a 的取值范围，而 $f(x_1) + f(x_2) > 2(x_1 + x_2) + t$ 有解，

通过分裂参数法和构造新函数 $h(a) = -\frac{5}{4a} - 1 - \ln(2a)$ ($0 < a < \frac{1}{8}$)，通过利用导数研究 $h(a)$ 单调性、最值，即可得出 t 的取值范围.

【详解】

由题可得： $f'(x) = \frac{2ax^2 - x + 1}{x}$ ($x > 0$)，

因为函数 $f(x) = ax^2 - x + \ln x$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 ，

所以方程 $2ax^2 - x + 1 = 0$ 有两个不相等的正实数根，

$$\text{于是有} \begin{cases} \Delta = 1 - 8a > 0, \\ x_1 + x_2 = \frac{1}{2a} > 0, \\ x_1 x_2 = \frac{1}{2a} > 0, \end{cases} \text{解得 } 0 < a < \frac{1}{8}.$$

若不等式 $f(x_1) + f(x_2) > 2(x_1 + x_2) + t$ 有解，

所以 $t < [f(x_1) + f(x_2) - 2(x_1 + x_2)]_{\max}$

因为 $f(x_1) + f(x_2) - 2(x_1 + x_2) = ax_1^2 - x_1 + \ln x_1 + ax_2^2 - x_2 + \ln x_2 - 2(x_1 + x_2)$

$$= a[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] - 3(x_1 + x_2) + \ln(x_1 x_2) = -\frac{5}{4a} - 1 - \ln(2a).$$

$$\text{设 } h(a) = -\frac{5}{4a} - 1 - \ln(2a) \left(0 < a < \frac{1}{8} \right),$$

$$h'(a) = \frac{5 - 4a}{4a^2} > 0, \text{ 故 } h(a) \text{ 在 } \left(0, \frac{1}{8} \right) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{故 } h(a) < h\left(\frac{1}{8}\right) = -11 + 2\ln 2,$$

$$\text{所以 } t < -11 + 2\ln 2,$$

$$\text{所以 } t \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -11 + 2\ln 2).$$

故选：C.

【点睛】

本题考查利用导数研究函数单调性、最值来求参数取值范围，以及运用分离参数法和构造函数法，还考查分析和计算能力，有一定的难度.

9、B

【解析】

$$\text{由 } z \cdot z_1 = 5 \text{ 可得 } z = \frac{5}{z_1}, \text{ 所以 } |z| = \frac{5}{|z_1|} = \frac{5}{|2+i|} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \text{ 故选 B.}$$

10、C

【解析】

求出导函数 $f'(x)$ ，由 $f'(x) = 0$ 有不等的两实根，即 $\Delta > 0$ 可得不等关系，然后由余弦定理可及余弦函数性质可得结论.

【详解】

$$\text{Q } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - ac)x, \therefore f'(x) = x^2 + bx + \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - ac).$$

$$\text{若 } f(x) \text{ 存在极值, 则 } b^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times (a^2 + c^2 - ac) > 0, \therefore a^2 + c^2 - b^2 < ac$$

$$\text{又 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \therefore \cos B < \frac{1}{2}. \text{ 又 } Q B \in (0, \pi), \therefore \frac{\pi}{3} < B < \pi.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查导数与极值，考查余弦定理．掌握极值存在的条件是解题关键．

11、A

【解析】

先利用换底公式将对数都化为以 2 为底,利用对数函数单调性可比较 a, b ,再由中间值 1 可得三者的大小关系.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/997046101044006142>