云南省昆明三中滇池中学 2023-2024 学年数学高三上期末教学质量检测试题

注意事项

1．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0．5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置．

3．请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符．

4．作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．作答非选择题，必须用 05 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效．

5．如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗．

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知双曲线$\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\quad b>0)$的右焦点为$F$，过原点的直线$l$与双曲线$\Gamma$的左、右两支分别交于$A,B$两点，延长$BF$交右支于$C$点，若$AF\perp FB,|CF|=3|FB|$，则双曲线$\Gamma$的离心率是（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{17}}{3}$　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．$\dfrac{5}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

2．已知函数$f\left(x\right)=3\sin\left(\omega x+\varphi\right)$，$\left(\omega>0,0<\varphi<\pi\right)$，若$f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，对任意$x\in\mathbf{R}$恒有$f\left(x\right)\le\left|f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$，在区间$\left(\dfrac{\pi}{15},\dfrac{\pi}{5}\right)$上有且只有一个$x_1$使$f\left(x_1\right)=3$，则$\omega$的最大值为（　　）

A．$\dfrac{123}{4}$　　B．$\dfrac{111}{4}$　　C．$\dfrac{105}{4}$　　D．$\dfrac{117}{4}$

3．下列说法正确的是（　　）

A．“若$a>1$，则$a>1$”的否命题是“若$a>1$，则$a^2<1$”

B．在$\vee ABC$中，“$A>B$”是“$\sin A>\sin B$”成立的必要不充分条件

C．“若$\tan\alpha\ne1$，则$\alpha\ne\dfrac{\pi}{4}$”是真命题

D．存在$x_0\in(-\infty,0)$，使得$2^{x_0}<3^{x_0}$成立

4．$\left(x^3-1\right)\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^6$的展开式中的常数项为(　　)

A．－60　　B．240　　C．－80　　D．180

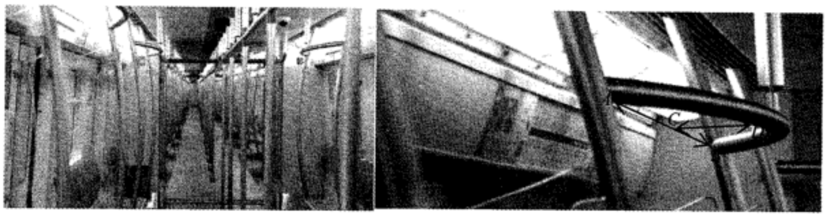
5．已知复数 $z_1=3+4i,z_2=a+i$,且 $z_1\overline{z}_2$是实数,则实数 a 等于(　　)

A．$\dfrac{3}{4}$　　B．$\dfrac{4}{3}$　　C．$-\dfrac{4}{3}$　　D．$-\dfrac{3}{4}$

6．已知函数$f(x)=ax^2-4ax-\ln x$，则$f(x)$在$(1,4)$上不单调的一个充分不必要条件可以是（　　）

A．$a>-\frac{1}{2}$　　B．$0<a<\frac{1}{16}$　　C．$a>\frac{1}{16}$或$-\frac{1}{2}<a<0$　D．$a>\frac{1}{16}$

7．在很多地铁的车厢里，顶部的扶手是一根漂亮的弯管，如下图所示．将弯管形状近似地看成是圆弧，已知弯管向外的最大突出(图中CD)有$15cm$，跨接了6个坐位的宽度(AB)，每个座位宽度为$43cm$，估计弯管的长度，下面的结果中最接近真实值的是（　　）



A．$250cm$　　B．$260cm$　　C．$295cm$　　D．$305cm$

8．以$A(3,-1)$，$B(-2,2)$为直径的圆的方程是

A．$x^2+y^2-x-y-8=0$　　B．$x^2+y^2-x-y-9=0$

C．$x^2+y^2+x+y-8=0$　　D．$x^2+y^2+x+y-9=0$

9．直线$y=kx+1$与抛物线***C***：$x^2=4y$交于***A***，***B***两点，直线$l//AB$，且***l***与***C***相切，切点为***P***，记$\triangle PAB$的面积为***S***，则$S-|AB|$的最小值为(　　)

A．$-\frac{9}{4}$　　B．$-\frac{27}{4}$　　C．$-\frac{32}{27}$　　D．$-\frac{64}{27}$

10．双曲线***C***：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的离心率是3，焦点到渐近线的距离为$\sqrt{2}$，则双曲线***C***的焦距为（　　）

A．3　　B．$3\sqrt{2}$　　C．6　　D．$6\sqrt{2}$

11．正ΔABC的边长为2，将它沿BC边上的高AD翻折，使点B与点C间的距离为$\sqrt{3}$，此时四面体$A-BCD$的外接球表面积为（　　）

A．$\frac{10\pi}{3}$　　B．4π　　C．$\frac{13\pi}{3}$　　D．7π

12．已知数列$\{a_n\}$满足$\log_3 a_n+1=\log_3 a_{n+1}\left(n\in N^*\right)$,且$a_2+a_4+a_6=9$,则$\log_{\frac{1}{3}}\left(a_3+a_5+a_7\right)$的值是(　　)

A．5　　B．-3　　C．4　　D．$\frac{9}{91}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．某校为了解学生学习的情况，采用分层抽样的方法从高一2400人、高二 2000人、高三n人中，抽取90人进行问卷调查.已知高一被抽取的人数为36，那么高三被抽取的人数为_______.

14．若$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)^n$的展开式中只有第六项的二项式系数最大，则展开式中各项的系数和是________.

15．已知抛物线$C:y^2=4x$，点P为抛物线C上一动点，过点P作圆$M:(x-3)^2+y^2=4$的切线，切点分别为A,B，则线段AB长度的取值范围为_________.

16．函数$f(x)=\sqrt{\lg\frac{2}{x}-1}$的定义域为____________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12分）已知ΔABC中，内角A,B,C所对边分别是$a,b,c,$其中$a=2,c=\sqrt{3}$.

（1）若角A为锐角，且$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，求$\sin B$的值；

（2）设$f(C)=\sqrt{3}\sin C\cos C+3\cos^2 C$，求$f(C)$的取值范围.

18．（12分）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F_1$，过点$F_1$且与$x$轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为$\sqrt{2}$，且$F_1$与短轴两端点的连线相互垂直.

（1）求椭圆C的方程；

（2）若圆$O:x^2+y^2=a^2$上存在两点M，N，椭圆C上存在两个点P,Q满足：M,N,F_1三点共线，P,Q,F_1三点共线，且$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MN}=0$，求四边形$PMQN$面积的取值范围.

19．（12分）在$\triangle ABC$中，角**A**，**B**，**C**的对边分别是**a**，**b**，**c**，且向量$\vec{m}=(2a-c,b)$与向量$\vec{n}=(\cos C,\cos B)$共线.

（1）求**B**；

（2）若$b=3\sqrt{7}$，$a=3$，且$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$，求**BD**的长度.

20．（12分）已知椭圆：$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），四点$P_1(1,1)$，$P_2(0,1)$，$P_3\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$P_4\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$中恰有三点在椭圆$C$上.

（1）求椭圆C的方程；

（2）设椭圆C的左右顶点分别为A，B.P是椭圆C上异于A，B的动点，求$\angle APB$的正切的最大值.

21．（12分）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$A$为椭圆上一动点（异于左右顶点），$\Delta AF_1F_2$面积的最大值为$\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若直线 $l: y = x + m$ 与椭圆 C 相交于点 A, B 两点，问 y 轴上是否存在点 M ，使得 ΔABM 是以 M 为直角顶点的等腰直角三角形？若存在，求点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

22．（10 分）已知在□□□□中，角□, □, □的对边分别为□, □, □,且$\frac{\cos □}{□} + \frac{\cos □}{□} = \frac{2\sqrt{3}\sin □}{3\sin □}$.

（1）求□的值；

（2）若$\cos □ + \sqrt{3}\sin □ = 2$,求□ + □的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**D**

【解析】

设双曲线的左焦点为 F'，连接 BF'， AF'， CF'，设 $BF = x$，则 $CF = 3x$， $BF' = 2a + x$， $CF' = 3x + 2a$， $Rt\Delta CBF'$ 和 $Rt\Delta FBF'$ 中，利用勾股定理计算得到答案.

【详解】

设双曲线的左焦点为 F'，连接 BF'， AF'， CF'，

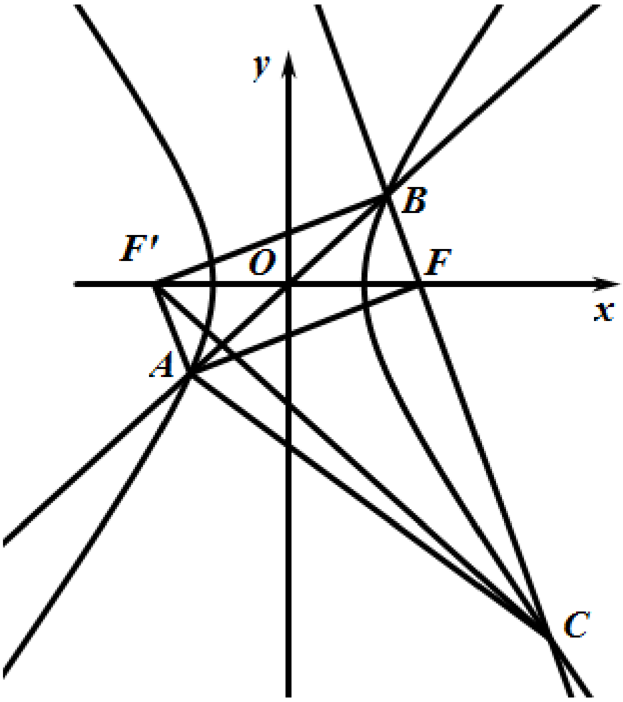
设 $BF = x$，则 $CF = 3x$， $BF' = 2a + x$， $CF' = 3x + 2a$，

$AF \perp FB$，根据对称性知四边形 $AFBF'$ 为矩形，

$Rt\Delta CBF'$ 中： $CF'^2 = CB^2 + BF'^2$，即 $(3x + 2a)^2 = (4x)^2 + (2a + x)^2$，解得 $x = a$；

$Rt\Delta FBF'$ 中： $FF'^2 = BF^2 + BF'^2$，即 $(2c)^2 = a^2 + (3a)^2$，故 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{2}$，故 $e = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

故选： D.



【点睛】

本题考查了双曲线离心率，意在考查学生的计算能力和综合应用能力.

2、C

【解析】

根据 $f(x)$ 的零点和最值点列方程组，求得 ω,φ 的表达式（用 k 表示），根据 $f(x_1)$ 在 $\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 上有且只有一个最大值，求得 ω 的取值范围，求得对应 k 的取值范围，由 k 为整数对 k 的取值进行验证，由此求得 ω 的最大值.

【详解】

由题意知 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$ $k_1,k_2\in Z$，则 $\begin{cases}\omega=\frac{3(2k+1)}{4},\\ \varphi=\frac{(2k'+1)\pi}{4},\end{cases}$ 其中 $k=k_1-k_2$，$k'=k_2+k_1$.

又 $f(x_1)$ 在 $\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 上有且只有一个最大值，所以 $\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{15}=\frac{2\pi}{15}\le 2T$，得 $0<\omega\le 30$，即 $\frac{3(2k+1)}{4}\le 30$，所以 $k\le 19.5$，又 $k\in Z$，因此 $k\le 19$.

①当 $k=19$ 时，$\omega=\frac{117}{4}$，此时取 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ 可使 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 成立，当 $x\in\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 时，

$\frac{117}{4}x+\frac{3\pi}{4}\in(2.7\pi,6.6\pi)$，所以当 $\frac{117}{4}x_1+\frac{3\pi}{4}=4.5\pi$ 或 6.5π 时，$f(x_1)=3$ 都成立，舍去；

②当 $k=18$ 时，$\omega=\dfrac{111}{4}$，此时取 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 可使 $\begin{cases}-\dfrac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\ \dfrac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 成立，当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{15},\dfrac{\pi}{5}\right)$ 时，$\dfrac{111}{4}x+\dfrac{\pi}{4}\in(2.1\pi,5.8\pi)$，

所以当 $\dfrac{111}{4}x_1+\dfrac{\pi}{4}=2.5\pi$ 或 4.5π 时，$f(x_1)=3$ 都成立，舍去；

③当 $k=17$ 时，$\omega=\dfrac{105}{4}$，此时取 $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$ 可使 $\begin{cases}-\dfrac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\ \dfrac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 成立，当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{15},\dfrac{\pi}{5}\right)$ 时，

$\dfrac{105}{4}x+\dfrac{3\pi}{4}\in(2.5\pi,6\pi)$，所以当 $\dfrac{105}{4}x_1+\dfrac{3\pi}{4}=4.5\pi$ 时，$f(x_1)=3$ 成立；

综上所得 ω 的最大值为 $\dfrac{105}{4}$.

故选:C

【点睛】

本小题主要考查三角函数的零点和最值，考查三角函数的性质，考查化归与转化的数学思想方法，考查分类讨论的数学思想方法，属于中档题.

3、C

【解析】

A：否命题既否条件又否结论，故 A 错.

B：由正弦定理和边角关系可判断 B 错.

C：可判断其逆否命题的真假，C 正确.

D：根据幂函数的性质判断 D 错.

【详解】

解：A：“若 $a>1$，则 $a>1$”的否命题是“若 $a\le1$，则 $a^2\le1$”，故 A 错.

B：在 $\vee ABC$ 中，$A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow 2R\sin A>2R\sin B$，故“$A>B$”是“$\sin A>\sin B$”成立的必要充分条件，故 B 错.

C：“若 $\tan\alpha\ne1$，则 $\alpha\ne\dfrac{\pi}{4}$”$\Leftrightarrow$“若 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，则 $\tan\alpha=1$”，故 C 正确.

D：由幂函数 $y=x^n(n<0)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，故 D 错.

故选：C

【点睛】

考查判断命题的真假，是基础题.

4、**D**

【解析】

求$\left(x^3-1\right)\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^6$的展开式中的常数项，可转化为求$\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^6$展开式中的常数项和$\dfrac{1}{x^3}$项，再求和即可得出答案.

【详解】

由题意，$\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^6$中常数项为$C_6^2\left(\sqrt{x}\right)^4\left(\dfrac{2}{x}\right)^2=60$，

$\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^6$中$\dfrac{1}{x^3}$项为$C_6^4\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\dfrac{2}{x}\right)^4=240\dfrac{1}{x^3}$，

所以$\left(x^3-1\right)\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^6$的展开式中的常数项为：

$x^3\times240\dfrac{1}{x^3}-1\times60=180$.

故选：**D**

【点睛】

本题主要考查二项式定理的应用和二项式展开式的通项公式，考查学生计算能力，属于基础题.

5、**A**

【解析】

分析：计算$\overline{z}_2=a-i$，由$\mathbf{z_1}\overline{z}_2=3a+4+\left(4a-3\right)i$，是实数得$4a-3=0$，从而得解.

详解：复数 $\mathbf{z_1=3+4i, z_2=a+i}$,

$\overline{z}_2=a-i$.

所以$\mathbf{z_1}\overline{z}_2=\left(3+4i\right)\left(a-i\right)=3a+4+\left(4a-3\right)i$，是实数，

所以$4a-3=0$，即$a=\dfrac{3}{4}$.

故选 **A.**

点睛：本题主要考查了复数共轭的概念，属于基础题.

6、**D**

【解析】

先求函数在$(1,4)$上不单调的充要条件，即$f'(x)=0$在$(1,4)$上有解，即可得出结论.

【详解】

$f'(x)=2ax-4a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2-4ax-1}{x}$，

若 $f(x)$ 在 $(1,4)$ 上不单调，令 $g(x)=2ax^2-4ax-1$，

则函数 $g(x)=2ax^2-4ax-1$ 对称轴方程为 $x=1$

在区间 $(1,4)$ 上有零点（可以用二分法求得）.

当 $a=0$ 时，显然不成立；

当 $a\neq 0$ 时，只需 $\begin{cases}a>0\\ g(1)=-2a-1<0\\ g(4)=16a-1>0\end{cases}$

或 $\begin{cases}a<0\\ g(1)=-2a-1>0\\ g(4)=16a-1<0\end{cases}$，解得 $a>\dfrac{1}{16}$ 或 $a<-\dfrac{1}{2}$.

故选:D.

【点睛】

本题考查含参数的函数的单调性及充分不必要条件，要注意二次函数零点的求法，属于中档题.

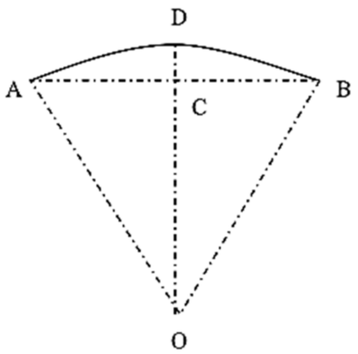
7、B

【解析】

$\overset{\frown}{AB}$ 为弯管，AB 为 6 个座位的宽度，利用勾股定理求出弧 AB 所在圆的半径为 r，从而可得弧所对的圆心角，再利用弧长公式即可求解.

【详解】

如图所示，$\overset{\frown}{AB}$ 为弯管，AB 为 6 个座位的宽度，



则 $AB=6\times 43=258cm$

$CD=15cm$

设弧 AB 所在圆的半径为 r，则

$r^2=(r-CD)^2+AC^2$

$=(r-15)^2+129^2$

解得 $r\approx 562cm$

$\sin\angle AOD=\frac{129}{562}\approx 0.23$

可以近似地认为 $\sin x\approx x$，即 $\angle AOD\approx 0.23$

于是 $\angle AOB\approx 0.46$， $\overset{\frown}{AB}$ 长 $\approx 562\times 0.46\approx 258.5$

所以 $260cm$ 是最接近的，其中选项 *A* 的长度比 AB 还小，不可能，

因此只能选 ***B***，**260** 或者由 $\cos x\approx 0.97$， $\sin 2x\approx 0.45\Rightarrow 2x<\frac{\pi}{6}$

所以弧长 $<562\times\frac{\pi}{6}\approx 294$.

故选：**B**

【点睛】

本题考查了弧长公式，需熟记公式，考查了学生的分析问题的能力，属于基础题.

8、**A**

【解析】

设圆的标准方程，利用待定系数法一一求出 a,b,r ，从而求出圆的方程.

【详解】

设圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ，

由题意得圆心 $O(a,b)$ 为 A ， B 的中点，

根据中点坐标公式可得 $a=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$， $b=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$，

又 $r=\frac{|AB|}{2}=\frac{\sqrt{(3+2)^2+(-1-2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$，所以圆的标准方程为：

$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{17}{2}$，化简整理得 $x^2+y^2-x-y-8=0$，

所以本题答案为 **A.**

【点睛】

本题考查待定系数法求圆的方程，解题的关键是假设圆的标准方程，建立方程组，属于基础题.

9、**D**