

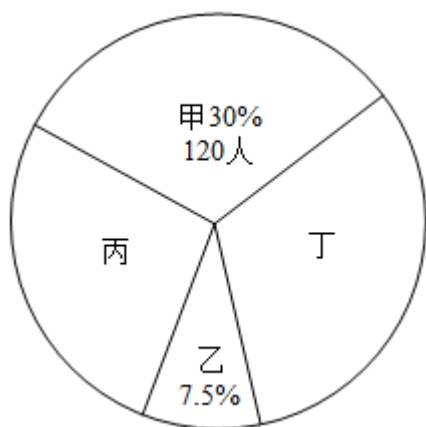
2022-2023 学年广东省广州市天河中学高一（下）期中数学试卷

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分．在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 若向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b})$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ()

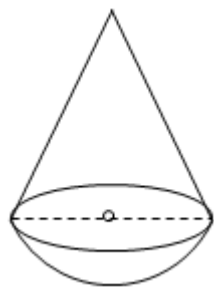
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

2. 甲、乙、丙、丁四组人数分布如图所示, 根据扇形统计图的情况可以知道丙、丁两组人数和为 ()



- A. 150 B. 250 C. 300 D. 400

3. 如图所示, 是某厂生产的一批不倒翁型台灯外形, 它由一个圆锥和一个半球组合而成, 其中, 圆锥的底面和球的直径都是 $0.2m$, 圆锥的高是 $0.24m$. 要对 1000 个这样的台灯表面涂一层胶, 如果每平方米需要涂胶 100 克, 则共需胶 () 克.



- A. 340π B. 440π C. 4600π D. 6600π

4. 若复数 z 为纯虚数, 且 $z(3 - 7i) = m - 3i$, 则实数 m 的值为 ()

- A. $-\frac{9}{7}$ B. $\frac{9}{7}$ C. -7 D. 7

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2\sqrt{2}$, $b = 3$, $A = 45^\circ$, 则此三角形解的个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 不确定

6. 正四棱台的上、下底面的边长分别为 2, 4, 侧棱长为 2, 则其体积为 ()

- A. $20 + 12\sqrt{3}$ B. $28\sqrt{2}$ C. $\frac{56}{3}$ D. $\frac{28\sqrt{2}}{3}$

7. 已知一组样本数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$, 且 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{10}^2 = 185$, 平均数 $\bar{x} = 4$, 则该组数据的方

差 $s^2 = (\quad)$

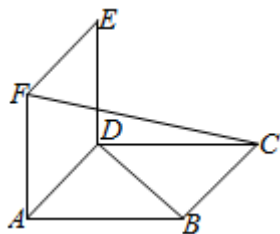
A. 1

B. $\frac{3}{2}$

C. 2

D. $\frac{5}{2}$

8. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{3}$, 正方形 $ADEF$ 的边长为 1, 且平面 $ABCD \perp$ 平面 $ADEF$, 则异面直线 BD 与 FC 所成角的余弦值为 ()



A. $-\frac{\sqrt{7}}{7}$

B. $\frac{\sqrt{7}}{7}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

二、多选题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分. 在每小题有多项符合题目要求)

9. 已知复数 z 满足 $(1 - i)z = 2i$, 则下列关于复数 z 的结论正确的是 ()

A. $|z| = \sqrt{2}$

B. z 的虚部为 i

C. 复数 z 的共轭复数 $\bar{z} = -1 - i$

D. 复数 z 是方程 $x^2 + 2x + 2 = 0$ 的一个根

10. 已知 α, β 是两个不同的平面, l, m 是两条不同的直线, 则下列说法正确的有 ()

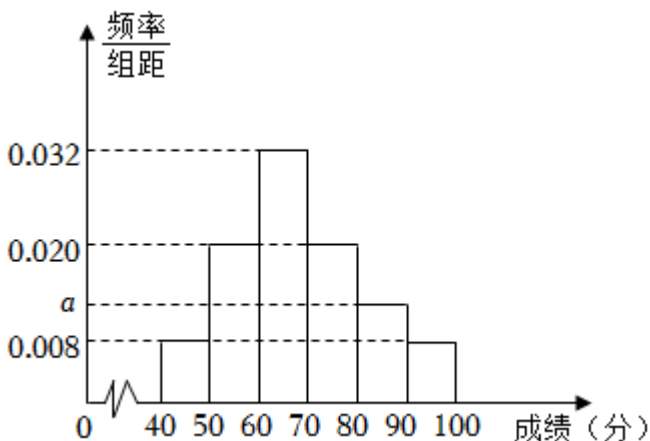
A. 若 $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha$, 则 $l \parallel m$

B. 若 $l \parallel \alpha, \alpha \parallel \beta, l \not\subset \beta$, 则 $l \parallel \beta$

C. 若 $l \perp \alpha, m \perp \beta, \alpha \perp \beta$, 则 $l \perp m$

D. 若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, l \perp m$, 则 $l \perp \beta$

11. 某校为了解学生体能素质, 随机抽取了 100 名学生进行体能测试, 并将这 100 名学生成绩整理得到如下频率分布直方图. 根据此频率分布直方图, 下列结论中正确的是 ()



A. $a = 0.012$

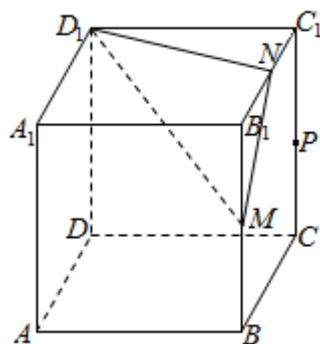
B. 这 100 名学生中成绩在 $[50, 70)$ 内的人数为 52

C. 这 100 名学生成绩的中位数为 65

D. 这 100 名学生的平均成绩为 68.2 (同一组中的数据用该组区间的中点值做代表)

12. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N, P 分别为棱 BB_1, B_1C_1, CC_1 的中点, 则下列结论正确

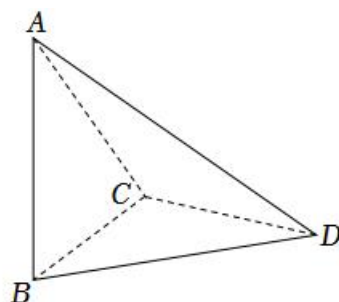
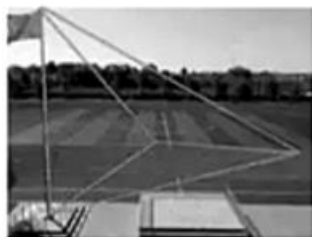
的是 ()



- A. $A_1C \perp$ 平面 D_1MN
- B. 点 P 与点 D 到平面 D_1MN 的距离相等
- C. 平面 D_1MN 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所得截面图形为等腰梯形
- D. 平面 D_1MN 将正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 分割成的上、下两部分的体积之比为 7:17

三、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

13. 已知一组数按从小到大顺序排列的数据: 24, 30, 36, 38, 40, 50, 52, 54, 57, 60; 这组数据的第 30 百分位数为_____.
14. 已知 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 16$, 若 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $4\vec{b}$, 则 $|\vec{b}| =$ _____.
15. 某中学数学兴趣小组为了测量校园旗杆的高度, 如图所示, 在操场上选择了 C 、 D 两点, 在 C 、 D 处测得旗杆的仰角分别为 45° , 30° , 在水平面上测得 $\angle BCD = 120^\circ$ 且 C 、 D 的距离为 15 米, 则旗杆的高度为_____米.



16. 在边长为 3 的菱形 $ABCD$ 中, $BD = 3\sqrt{3}$, 将菱形 $ABCD$ 沿其对角线 AC 折成直二面角 $B - AC - D$, 若 A 、 B 、 C 、 D 四点均在某球面上, 则该球的表面积为_____.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70.0 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步调)

17. (10 分) 已知 $\vec{a} = (-1, \sin x)$, $\vec{b} = (1, \cos x)$.

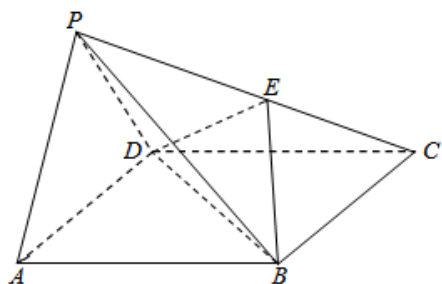
(1) 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 求 $\frac{2\cos^2 x - \sin 2x}{\sin x \cdot \cos x}$ 的值.

(2) 设 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$, 现将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度后

得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求函数 $g(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的值域.

18. (12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $ABCD$ 为正方形, E 为 PC 中点, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=4$, $PA=PD=2\sqrt{2}$.

- (1) 证明: $PA \parallel$ 平面 BDE ;
- (2) 证明: $AB \perp PD$;
- (3) 求三棱锥 $C-BDE$ 的体积.



19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 现给出两个条件:

- ① $a \cos C = (2b - c) \cos A$;
- ② $\tan A + \tan B + \tan C - \sqrt{3} \tan B \tan C = 0$.

要求你从中选出一个条件, 并以此为依据解下面问题:

- (1) 求 A 的值;
- (2) 若 $b=2$, D 为 BC 中点, 且 $AD = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

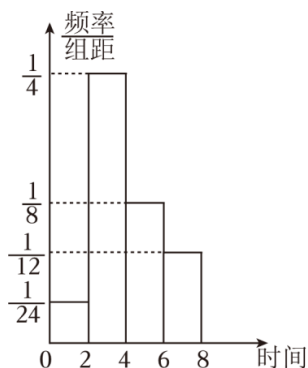
20. (12 分) 4 月 23 日是世界读书日, 树人中学为了解本校学生课外阅读情况, 按性别进行分层, 用分层随机抽样的方法从全校学生中抽出一个容量为 100 的样本, 其中男生 40 名, 女生 60 名经调查统计, 分别得到 40 名男生一周课外阅读时间 (单位, 小时) 的频数分布表和 60 名女生一周课外阅读时间 (单位: 小时) 的频率分布直方图 (以各组的区间中点值代表该组的各个值)

男生一周阅读时间频数分布表	
小时	频数
$[0, 2)$	9
$[2, 4)$	25
$[4, 6)$	3
$[6, 8)$	3

- (1) 从一周课外阅读时间为 $[4, 6)$ 的学生中按比例分配抽取 6 人, 则男生, 女生各抽出多少人?
- (2) 分别估计男生和女生一周课外阅读时间的平均数 $\bar{x}$, $\bar{y}$;
- (3) 估计总样本的平均数 $\bar{z}$ 和方差 s^2 .

参考数据和公式：男生和女生一周课外阅读时间方差的估计值分别为 $s_{男}^2 = 2.4$ 和 $s_{女}^2 = 3$.

$s^2 = \frac{1}{100} [\sum_{i=1}^{40} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{40} (\bar{x} - \bar{z})^2 + \sum_{i=1}^{60} (y_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{60} (\bar{y} - \bar{z})^2]$, x_i ($0 \leq i \leq 40$) 和 y_i ($0 \leq i \leq 60$) 分别表示男生和女生一周阅读时间的样本，其中 $i \in \mathbb{Z}$.



女生一周自读时间频率分布直方图

21. (12 分) 如图 1, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AD = 2$, $AB = 4$, 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 使得点 A 到达点 P , 如图 2.

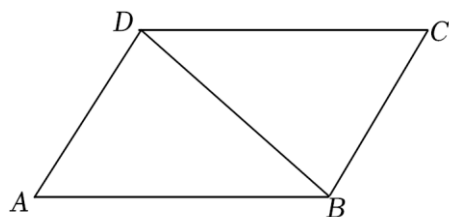


图1

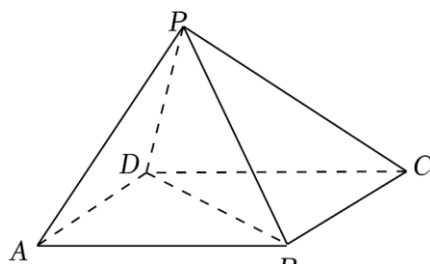
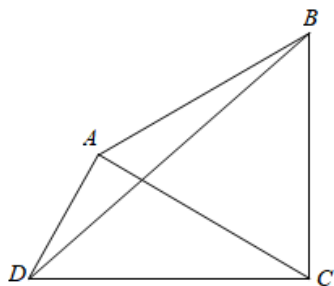


图2

- (1) 证明：平面 $BCD \perp$ 平面 PAD ;
- (2) 当二面角 $D - PA - B$ 的平面角的正切值为 $\sqrt{6}$ 时, 求直线 BD 与平面 PBC 夹角的正弦值.
22. (12 分) 杭州西溪国家湿地公园是以水为主题的公园, 以湿地良好生态环境和多样化湿地景观资源为基础的生态型主题公园. 欲在该公园内搭建一个平面凸四边形 $ABCD$ 的休闲、观光及科普宣教的平台, 如图所示, 其中 $DC = 4$ 百米, $DA = 2$ 百米, $\triangle ABC$ 为正三角形. 建成后 $\triangle BCD$ 将作为人们旅游观光、休闲娱乐的区域, $\triangle ABD$ 将作为科普宣教湿地功能利用、弘扬湿地文化的区域.

- (1) 当 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$ 时, 求旅游观光、休闲娱乐的区域 $\triangle BCD$ 的面积;

- (2) 求旅游观光、休闲娱乐的区域 $\triangle BCD$ 的面积的最大值.



2022-2023 学年广东省广州市天河区中学高一（下）期中数学试卷

参考答案与试题解析

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分．在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 若向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b})$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

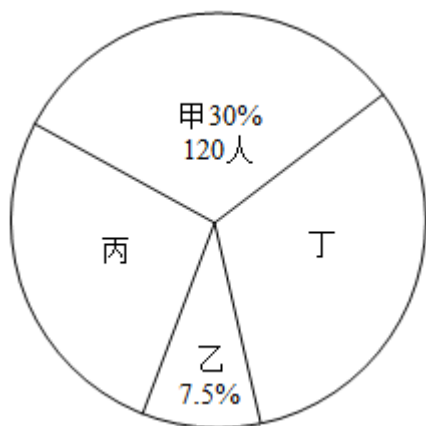
解: $\because \vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b})$, $\therefore \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -1, \therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-1}{1 \times 2} = -\frac{1}{2},$$

又 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [0, \pi]$, $\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$.

故选: C.

2. 甲、乙、丙、丁四组人数分布如图所示, 根据扇形统计图的情况可以知道丙、丁两组人数和为 ()



- A. 150 B. 250 C. 300 D. 400

解: $\because$ 甲组人数为 120 人, 占总人数的百分比为 30%,

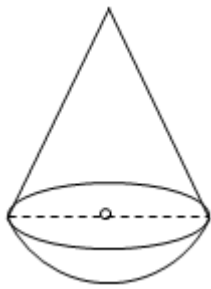
$\therefore$ 总人数为 $120 \div 30\% = 400$ 人,

$\because$ 丙、丁两组人数和占总人数的百分比为 $1 - 30\% - 7.5\% = 62.5\%$

$\therefore$ 丙、丁两组人数和为 $400 \times 62.5\% = 250$ 人.

故选: B.

3. 如图所示, 是某厂生产的一批不倒翁型台灯外形, 它由一个圆锥和一个半球组合而成, 其中, 圆锥的底面和球的直径都是 $0.2m$, 圆锥的高是 $0.24m$. 要对 1000 个这样的台灯表面涂一层胶, 如果每平方米需要涂胶 100 克, 则共需胶 () 克.



- A. 340π B. 440π C. 4600π D. 6600π

解：由题意圆锥的母线长为 $l = \sqrt{0.1^2 + 0.24^2} = 0.26$,

所以台灯表面积为 $S = \pi \times 0.1 \times 0.26 + 2\pi \times 0.1^2 = 0.046\pi$,

需胶重量为 $0.046\pi \times 100 \times 1000 = 4600\pi$ (克).

故选：C.

4. 若复数 z 为纯虚数，且 $z(3 - 7i) = m - 3i$ ，则实数 m 的值为 ()

- A. $-\frac{9}{7}$ B. $\frac{9}{7}$ C. -7 D. 7

解：由 $z(3 - 7i) = m - 3i$ ，得 $z = \frac{m-3i}{3-7i} = \frac{(m-3i)(3+7i)}{(3-7i)(3+7i)} = \frac{3m+21}{58} + \frac{7m-9}{58}i$,

又复数 z 为纯虚数， $\therefore \begin{cases} \frac{3m+21}{58} = 0 \\ \frac{7m-9}{58} \neq 0 \end{cases}$ ，解得 $m = -7$.

故选：C.

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $a = 2\sqrt{2}$ ， $b = 3$ ， $A = 45^\circ$ ，则此三角形解的个数为 ()

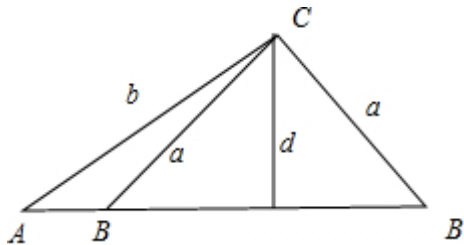
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 不确定

解：设 $\triangle ABC$ 的边 AB 边上的高为 d ，则 $d = b \sin A = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore d < a < b$,

$\therefore$ 三角形有两解.

故选：C.



6. 正四棱台的上、下底面的边长分别为 2，4，侧棱长为 2，则其体积为 ()

- A. $20 + 12\sqrt{3}$ B. $28\sqrt{2}$ C. $\frac{56}{3}$ D. $\frac{28\sqrt{2}}{3}$

解法一：如图 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱台， $AB = 2$ ， $A_1B_1 = 4$ ， $AA_1 = 2$.

在等腰梯形 A_1B_1BA 中，过 A 作 $AE \perp A_1B_1$ ，可得 $A_1E = \frac{4-2}{2} = 1$ ，

$$AE = \sqrt{AA_1^2 - A_1E^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

连接 AC ， A_1C_1 ，

$$AC = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}, \quad A_1C_1 = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2},$$

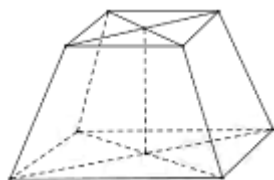
$$\text{过 } A \text{ 作 } AG \perp A_1C_1, \quad A_1G = \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$AG = \sqrt{AA_1^2 - A_1G^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2},$$

$\therefore$ 正四棱台的体积为：

$$V = \frac{S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + \sqrt{S_{\text{上}} \cdot S_{\text{下}}}}{3} \times h = \frac{2^2 + 4^2 + \sqrt{2^2 \times 4^2}}{3} \times \sqrt{2} = \frac{28\sqrt{2}}{3}.$$

解法二：作出图形，连接该正四棱台上下底面的中心，如图，



$\therefore$ 该四棱台上下底面边长分别为 2，4，侧棱长为 2，

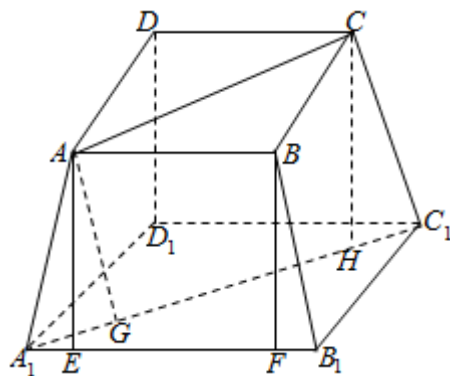
$$\therefore \text{该棱台的高 } h = \sqrt{2^2 - (2\sqrt{2} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2},$$

下底面面积 $S_1 = 16$ ，上底面面积 $S_2 = 4$ ，

则该棱台的体积为：

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times (16 + 4 + \sqrt{64}) = \frac{28\sqrt{2}}{3}.$$

故选：D.



7. 已知一组样本数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ ，且 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{10}^2 = 185$ ，平均数 $\bar{x} = 4$ ，则该组数据的方差 $s^2 =$ ()

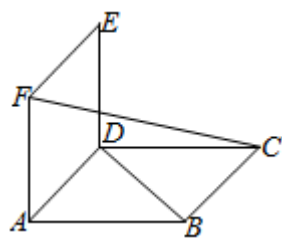
- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. $\frac{5}{2}$

解：由题意可知， $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{10}=4\times 10=40$ ，

$$\therefore s^2 = \frac{(x_1-4)^2+(x_2-4)^2+(x_3-4)^2+\cdots+(x_{10}-4)^2}{10} = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{10}^2-8(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{10})+16\times 10}{10} = \frac{185-8\times 40+16\times 10}{10} = 2.5.$$

故选：D.

8. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=\sqrt{3}$ ，正方形 $ADEF$ 的边长为 1，且平面 $ABCD\perp$ 平面 $ADEF$ ，则异面直线 BD 与 FC 所成角的余弦值为（ ）



- A. $-\frac{\sqrt{7}}{7}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{7}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

解：矩形 $ABCD$ 中， $AB=\sqrt{3}$ ，正方形 $ADEF$ 的边长为 1，且平面 $ABCD\perp$ 平面 $ADEF$

以 D 为原点， DA 为 x 轴， DC 为 y 轴， DE 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

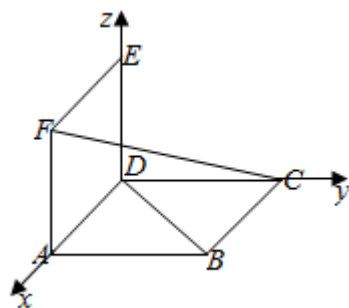
则 $B(1, \sqrt{3}, 0)$ ， $D(0, 0, 0)$ ， $F(1, 0, 1)$ ， $C(0, \sqrt{3}, 0)$ ，

$$\vec{BD} = (-1, -\sqrt{3}, 0), \vec{FC} = (-1, \sqrt{3}, -1),$$

设异面直线 BD 与 FC 所成角为 θ ，

$$\text{则异面直线 } BD \text{ 与 } FC \text{ 所成角的余弦值为：} \cos\theta = \frac{|\vec{BD} \cdot \vec{FC}|}{|\vec{BD}| \cdot |\vec{FC}|} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故选：C.



二、多选题（本大题共 4 小题，共 20.0 分．在每小题有多项符合题目要求）

9. 已知复数 z 满足 $(1-i)z=2i$ ，则下列关于复数 z 的结论正确的是（ ）

- A. $|z| = \sqrt{2}$ B. z 的虚部为 i
C. 复数 z 的共轭复数 $\bar{z} = -1-i$ D. 复数 z 是方程 $x^2+2x+2=0$ 的一个根

解：由 $(1-i)z=2i$ ，得 $(1-i)z = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i+2i^2}{2} = -1+i$ ，

所以 $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ，所以 A 正确，

复数 z 的虚部为 1 ，所以 B 错误，

复数 z 的共轭复数 $\bar{z} = -1-i$ ，所以 C 正确，

因为 $z^2+2z+2 = (-1+i)^2+2(-1+i)+2 = 1-2i+i^2-2+2i+2=0$ ，

所以复数 z 是方程 $x^2+2x+2=0$ 的一个根，所以 D 正确。

故选：ACD。

10. 已知 α, β 是两个不同的平面， l, m 是两条不同的直线，则下列说法正确的有（ ）

A. 若 $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha$ ，则 $l \parallel m$

B. 若 $l \parallel \alpha, \alpha \parallel \beta, l \not\subset \beta$ ，则 $l \parallel \beta$

C. 若 $l \perp \alpha, m \perp \beta, \alpha \perp \beta$ ，则 $l \perp m$

D. 若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, l \perp m$ ，则 $l \perp \beta$

解：对于 A ，若 $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha$ ， l 和 m 可以相交，故错误；

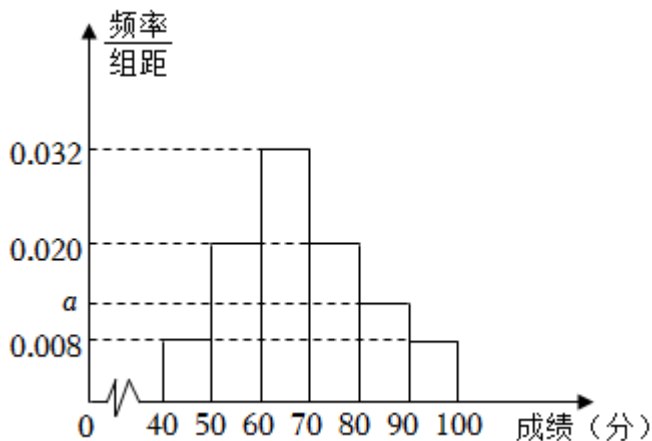
对于 B ，若 $l \parallel \alpha, \alpha \parallel \beta, l \not\subset \beta$ ，则 $l \parallel \beta$ ，正确；

对于 C ，若 $l \perp \alpha, \alpha \perp \beta$ ，则 $l \parallel \beta$ 或 l 在 β 内，又 $m \perp \beta$ ，则 $l \perp m$ 正确；

对于 D ，若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, l \perp m$ ，可能 $l \subset \beta$ ，故不一定成立。

故选：BC。

11. 某校为了解学生体能素质，随机抽取了 100 名学生进行体能测试，并将这 100 名学生成绩整理得到如下频率分布直方图。根据此频率分布直方图，下列结论中正确的是（ ）



A. $a=0.012$

B. 这 100 名学生中成绩在 $[50, 70)$ 内的人数为 52

C. 这 100 名学生成绩的中位数为 65

D. 这 100 名学生的平均成绩为 68.2 (同一组中的数据用该组区间的中点值做代表)

解：A 选项， $0.008 \times 10 + 0.020 \times 10 + 0.032 \times 10 + 10 \times 0.020 + 10a + 10 \times 0.008 = 1$ ， $\therefore a = 0.012$ ，A 正确；

B 选项， $10 \times 0.020 + 10 \times 0.032 = 0.52$ ， $100 \times 0.52 = 52$ ，B 正确；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/997111044200006062>