组 合 变 形

组合变形概念和工程实例

斜弯曲

轴向拉(压)与弯曲组合　偏心拉压

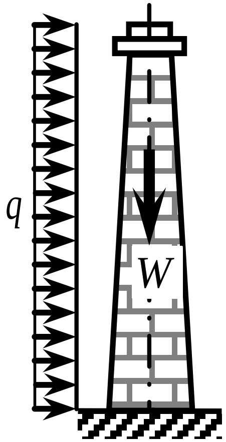
截面核心

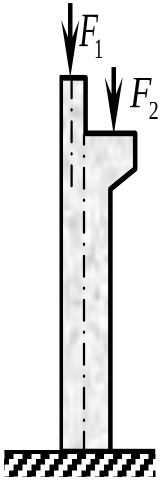
弯扭组合变形

组合变形概念和工程实例

杆件同时发生两种或两种以上的基本变形，如几种变形所对应的应力（或变形）属同一量级，称为组合变形

工程实例：烟囱，　　　　　　吊车梁的立柱



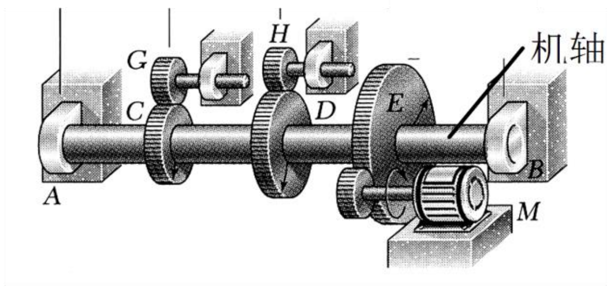


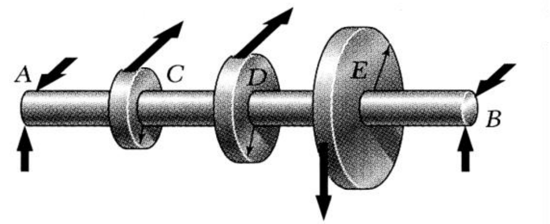
烟囱：自重引起轴向压缩 ＋ 水平方向的风力引起弯曲变形；

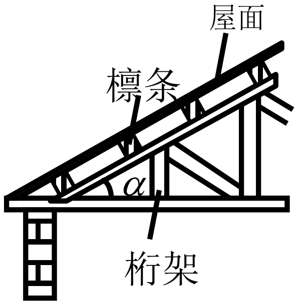
立柱：载荷不过轴线，发生偏心压缩 ＝ 轴向压缩 ＋ 弯曲

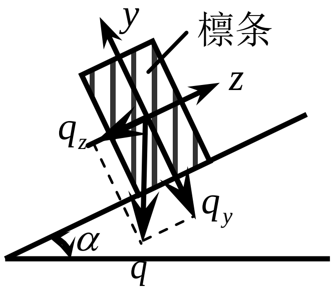
屋架上的檩条

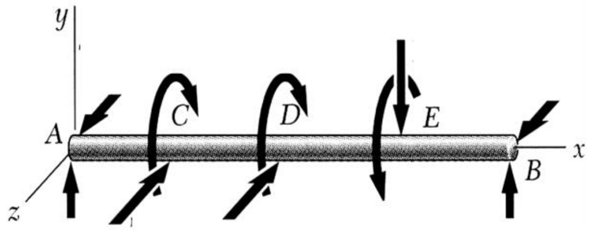
传动轴











屋面檩条： 在来自屋面的垂直载荷（如瓦、板的重力）作用下，发生由两个形心主惯性平面内的弯曲变形组合而成的斜弯曲变形；

传动轴（如齿轮轴、电动机轴、曲柄轴等）：发生扭转变形的同时，还伴有弯曲变形，如图所示机轴 AB

解决组合变形问题的基本方法 —— 叠加法

在线弹性范围内、小变形条件下，组合变形中每一种基本变形所引起的应力和变形都是各自独立、互不影响的

——解决组合变形的问题的基本方法是叠加法。

叠加法求解组合变形问题的具体步骤

① 载荷的分解和简化——通过载荷的分解或移动，形成若干组载荷，每一种载荷对应一种基本变形；

② 基本变形计算——计算构件在每一种基本变形形式下的内力、应力和位移；

③ 叠加求解——利用叠加原理，综合考虑各个基本变形的组合情况，确定危险截面、危险点和危险点的应力状态。将各基本变形在同一点上产生的应力叠加，对危险点依据强度理论进行强度计算，将各基本变形在同一截面上产生的位移合成，进行刚度计算。

斜 弯 曲

一、斜弯曲的概念

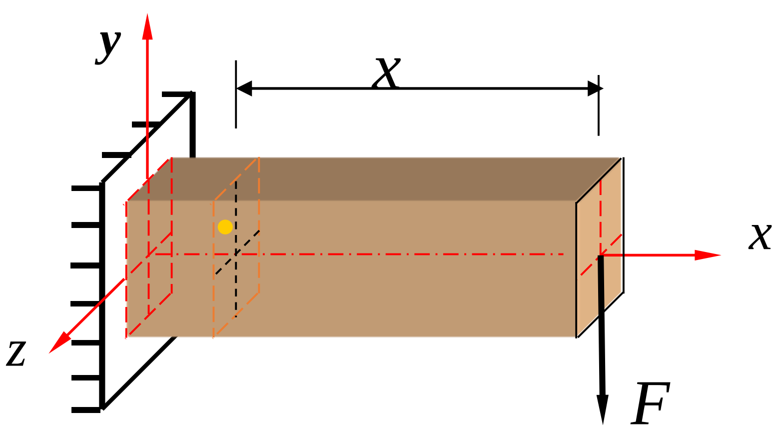
平面弯曲： 横向力通过弯曲中心且平行于形心主惯性轴

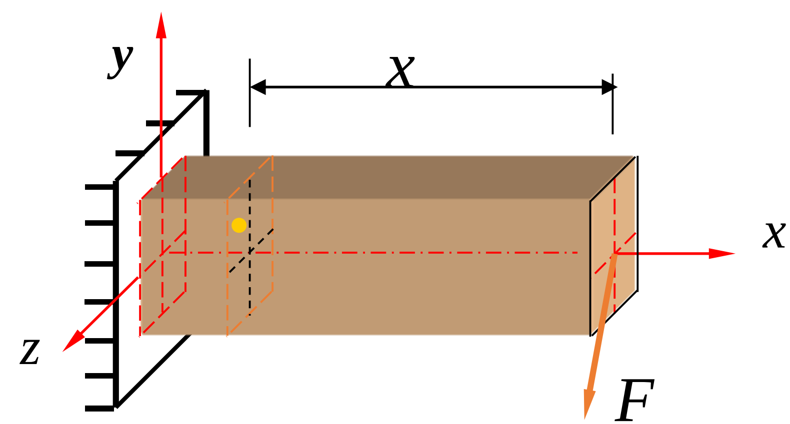
梁的挠曲线是一条位于形心主惯性平面（外力所在平面）内的平面曲线。

斜弯曲： 横向力通过弯曲中心，但不与形心主惯性轴平行

（或外力偶矩矢与形心主轴不一致）

梁的挠曲线是一条空间曲线，不在外力与轴线构成的平面内。

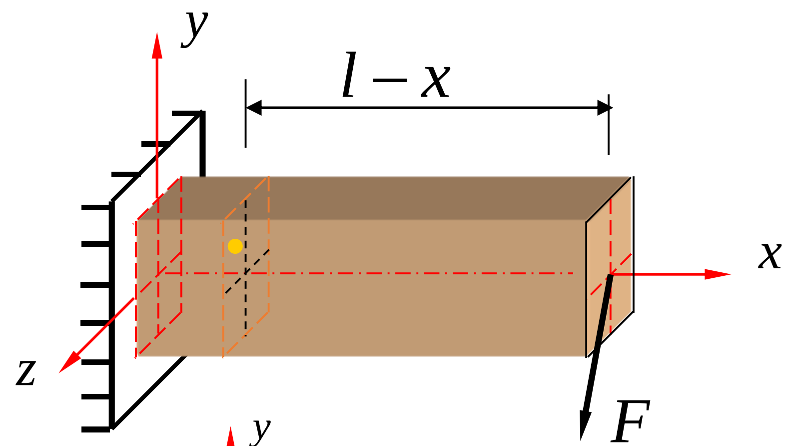




二、斜弯曲的计算

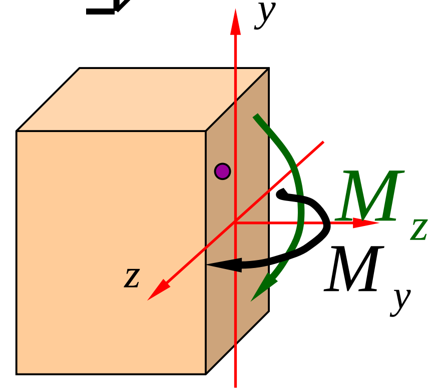
1、载荷的分解

$$F \Rightarrow \begin{cases} F_y = F\cos\varphi \\ F_z = F\sin\varphi \end{cases}$$



F_y 产生 xy 平面以 z为中性轴的平面弯曲

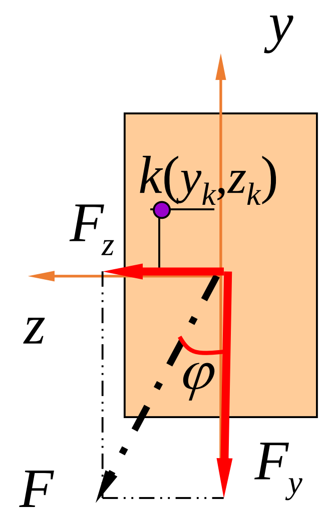
F_z 产生 xz 平面以 y 为中性轴的平面弯曲



2、任一横截面上的内力

$$M_z(x) = F_y(l-x)$$

$$M_y(x) = F_z(l-x)$$



本题中，危险截面为固定端截面（$x=0$ 处）

3、横截面上 k（z_k，y_k）点的应力

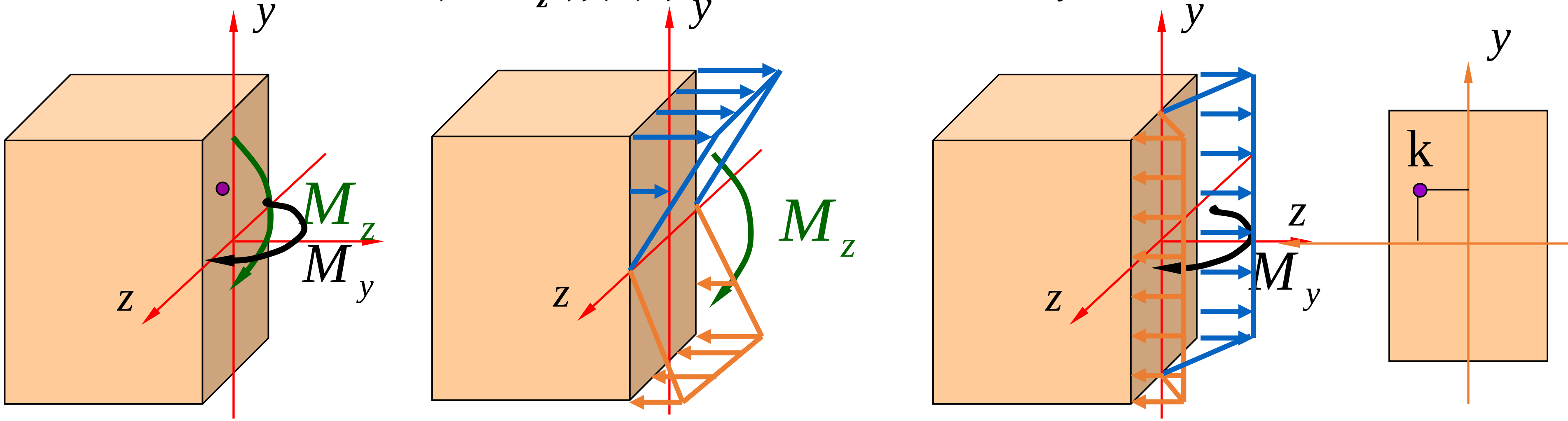
$$\sigma_k^{M_z} = \frac{M_z y_k}{I_z}\ ,\quad \sigma_k^{M_y} = -\frac{M_y z_k}{I_y}$$

$$\sigma_k = \sigma_k^{M_z} + \sigma_k^{M_y}$$

（应力的 “+”、“—” 由变形判断）

横截面正应力叠加

在 M_z 作用下：　　在 M_y 作用下：

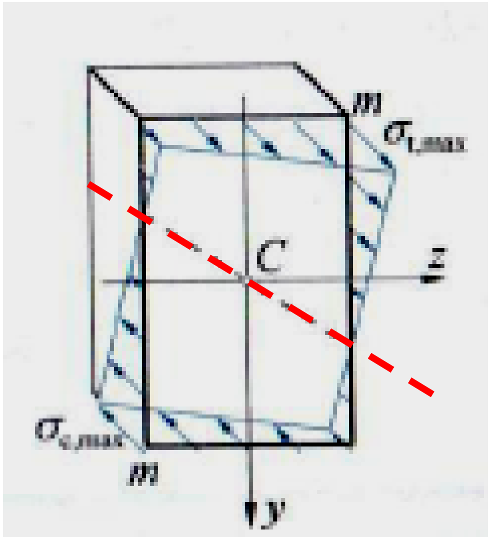


$k\,(y_k$、z_k）点的应力 $\sigma_k = \sigma_k^{M_z} + \sigma_k^{M_y}$

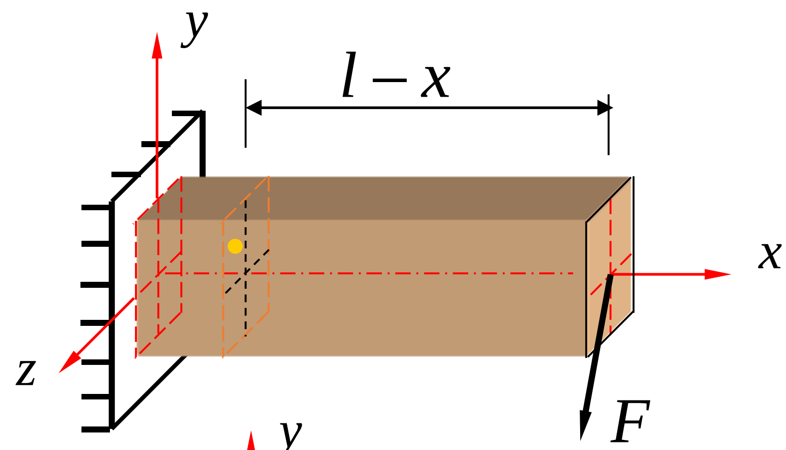
$$= \frac{M_z y_k}{I_z} - \frac{M_y z_k}{I_y}$$

上式表明：正应力沿横截面线性分布，横截面上各点处正应力矢量的端点，构成一个平面。

该平面与横截面的交线就是中性轴



$k\,(y_k$、$z_k)$ 点的应力



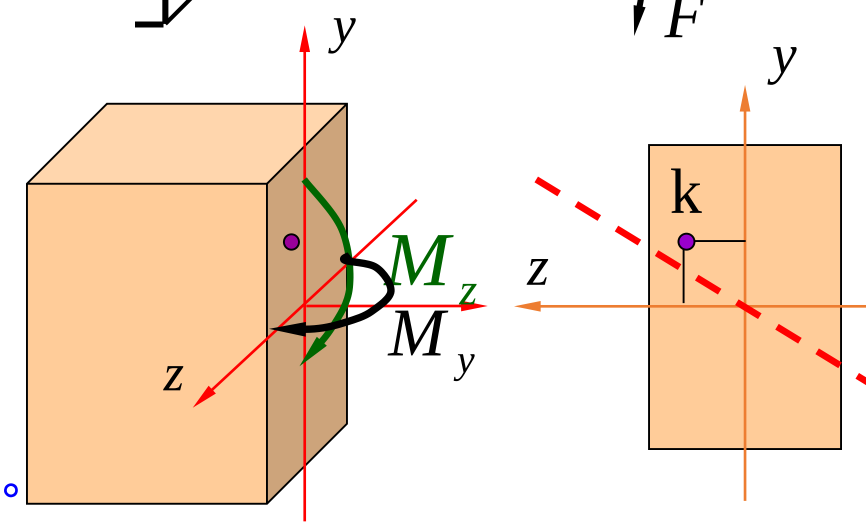
$$\sigma_k = \sigma_k^{M_z} + \sigma_k^{M_y} = \frac{M_z y_k}{I_z} - \frac{M_y z_k}{I_y}$$

中性轴的方程

设 $k_0\,(z_0$、$y_0)$点在中性轴上

（z_0、y_0代表中性轴上任意点的坐标）

$$\sigma_{k_0} = \frac{M_z y_0}{I_z} - \frac{M_y z_0}{I_y} = 0$$



中性轴方程（过截面形心的直线）。

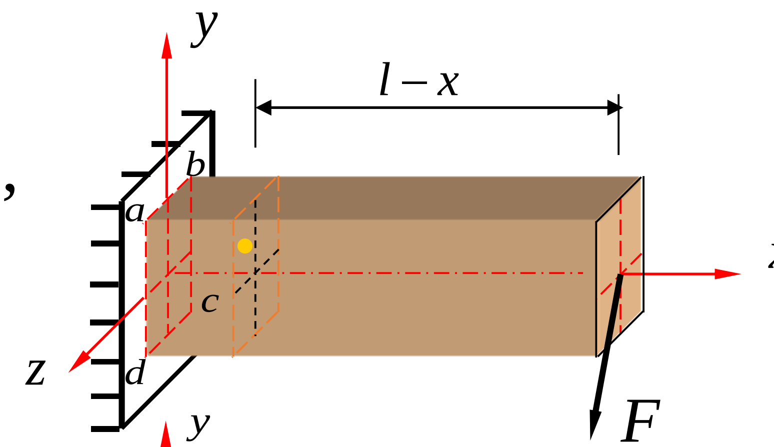
把截面分成受拉和受压两个区域

截面上应力最大的点就是（离中性轴最远的点）

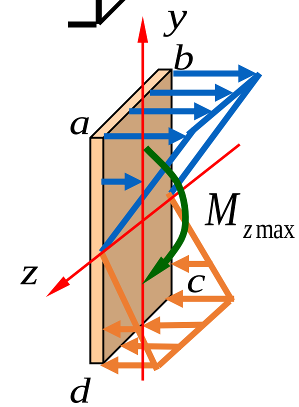
对于工程中常用的矩形、工字形等截面梁，其横截面的周边都有棱角，最大正应力必发生在截面的棱角处（离中性轴最远的点）。

4、强度计算

危险截面： 固定端截面 $M_{z\max}=F_y l,$
$M_{y\max}=F_z l$

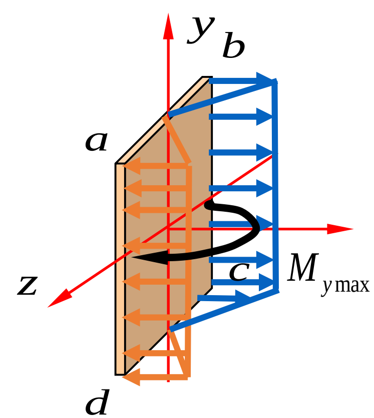


危险点： b 点为最大拉应力点
d 点为最大压应力点
（均为单向应力状态）



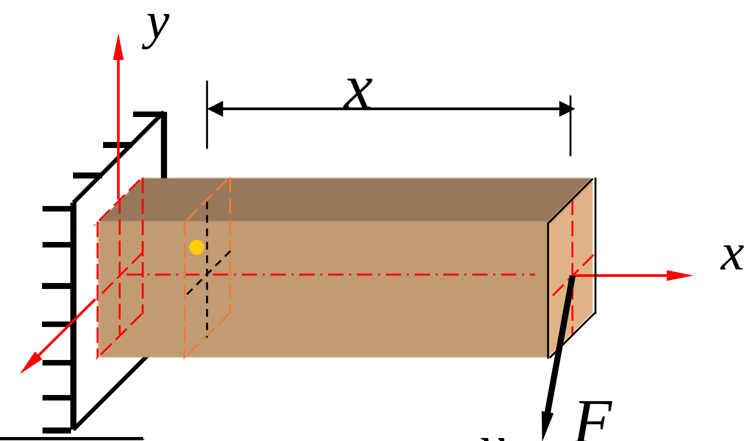
$$M_z(x)=F\cos\varphi(l-x)$$
$$M_y(x)=F\sin\varphi(l-x)$$

$$\sigma_{t\max}=-\sigma_{c\max}$$
$$=\frac{M_{z\max}y_{\max}}{I_z}+\frac{M_{y\max}z_{\max}}{I_y}$$
$$=\frac{M_{z\max}}{W_z}+\frac{M_{y\max}}{W_y}$$



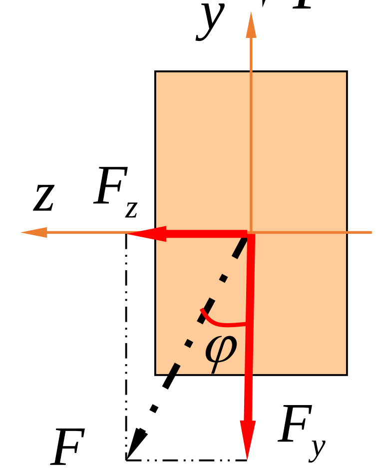
强度条件 $\sigma_{\max}\le[\sigma]$

5、最大挠度（自由端的挠度）



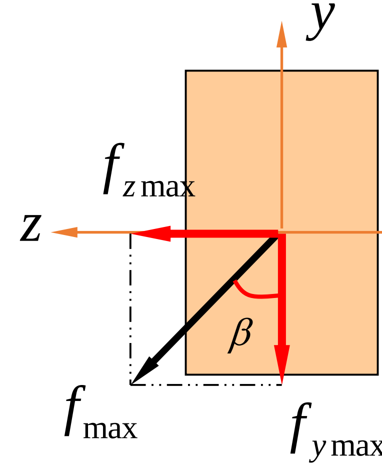
$$f_{y\max}=\frac{F_yL^3}{3EI_z},\qquad f_{z\max}=\frac{F_zL^3}{3EI_y}$$

$$f_{\max}=\sqrt{f_{y\max}^2+f_{z\max}^2}=\sqrt{\left(\frac{F_yL^3}{3EI_z}\right)^2+\left(\frac{F_zL^3}{3EI_y}\right)^2}$$



刚度条件： $f_{\max}\leq[f]$

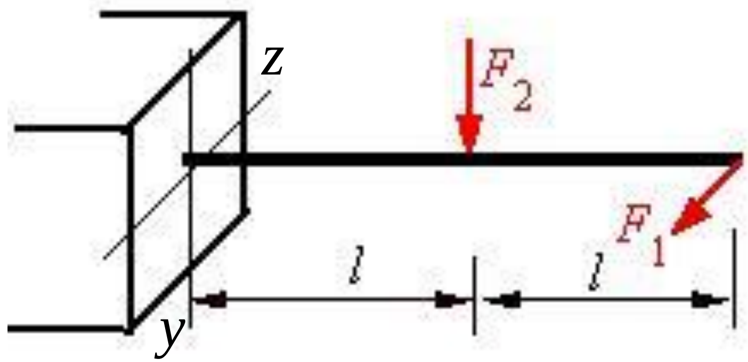
$$\tan\beta=\frac{f_{z\max}}{f_{y\max}}=\frac{F_z}{I_y}\frac{I_z}{F_y}=\frac{I_z}{I_y}\tan\varphi$$

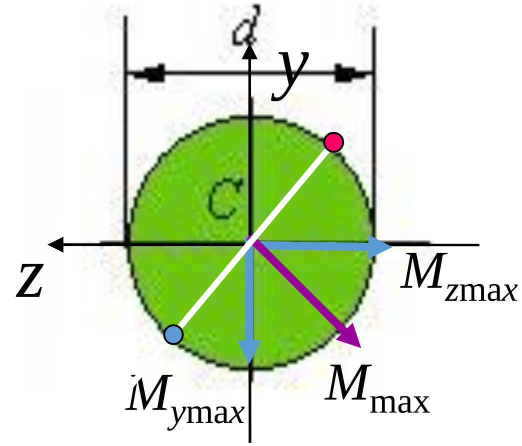


一般情况下 $I_z\neq I_y$，则 $\beta\neq\varphi$

梁的挠曲线是一条空间曲线，不在外力与轴线构成的平面内——斜弯曲与平面弯曲的区别

对 $I_z = I_y$ 的截面（圆截面、正方形截面和正多边形截面）





1、计算应力时，把 M_z、M_y 矢量合成为合成弯矩 $M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$

$$M_{z\max} = F_2 l,$$
$$M_{y\max} = F_1 \times 2l$$

合成弯矩 $M_{\max} = \sqrt{M_{z\max}^2 + M_{y\max}^2}$

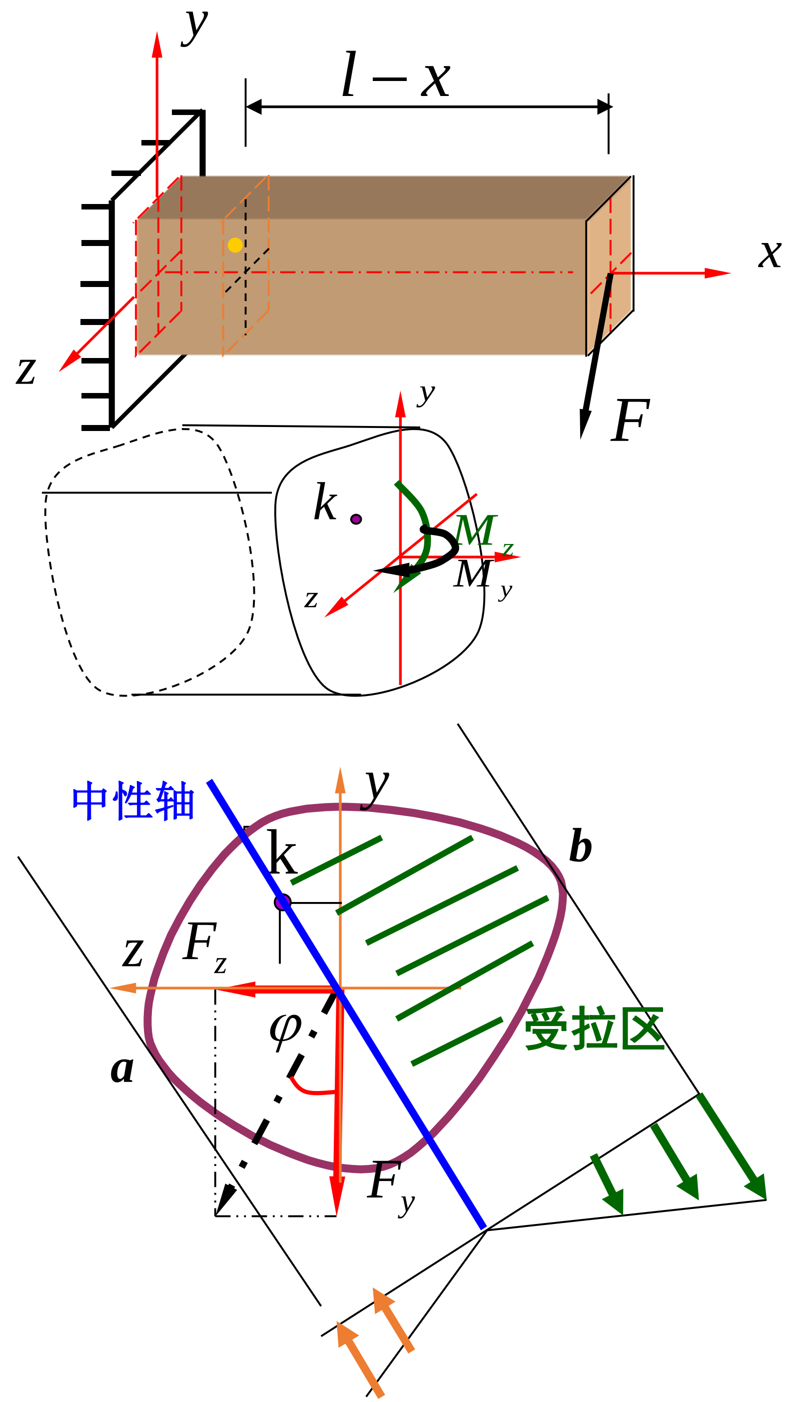
最大正应力 $\sigma_{\max} = \dfrac{\sqrt{(F_1 2l)^2 + (F_2 l)^2}}{\dfrac{\pi d^3}{32}}$

2、计算变形时，由于梁各横截面上合成弯矩所在平面的方位一般不相同，每一截面的挠度都发生在该截面的合成弯矩所在的平面内，因此梁的挠曲线一般是一条空间曲线。

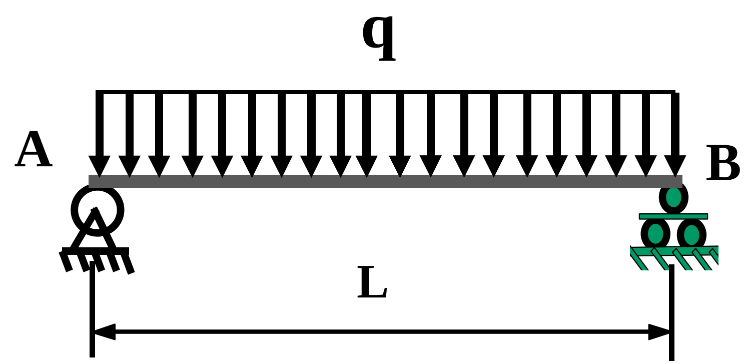
梁的挠曲线方程应分别按两个平面内的弯曲来算，不能直接用合成弯矩算。

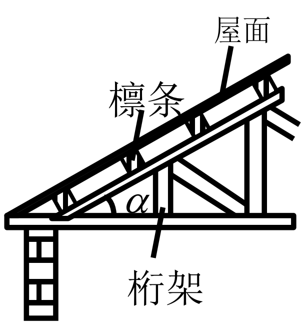
对于无棱角的截面

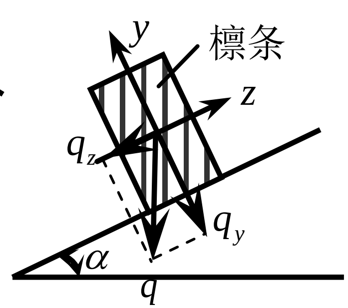
在确定中性轴位置之后，**画平行于中性轴的两直线与截面周边相切于 b、a 两点，该两点即为最大正应力所在的点**（离中性轴最远的点）。

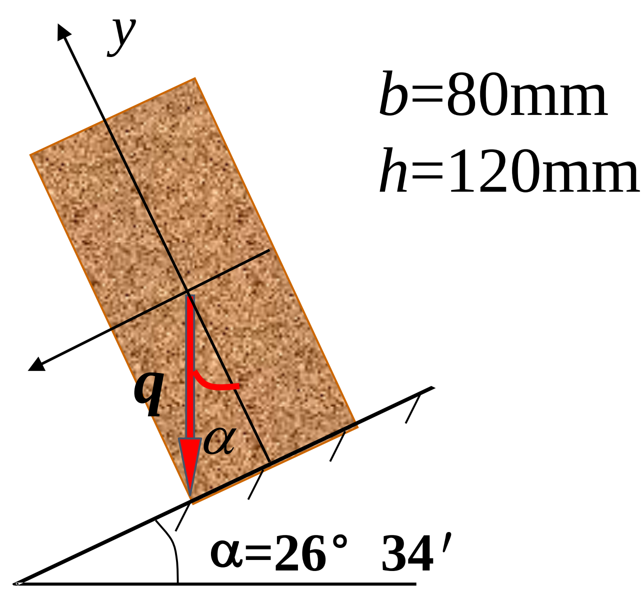


例： 矩形截面木檩条如图，屋架间距 L=3.3m,上弦杆的坡度为 α 。受屋面传来的载荷（如瓦、板的重力） q=800N/m 。材料的[σ]=12MPa，容许挠度为：L/200 ，E = 9 GPa，试校核此梁的强度和刚度。



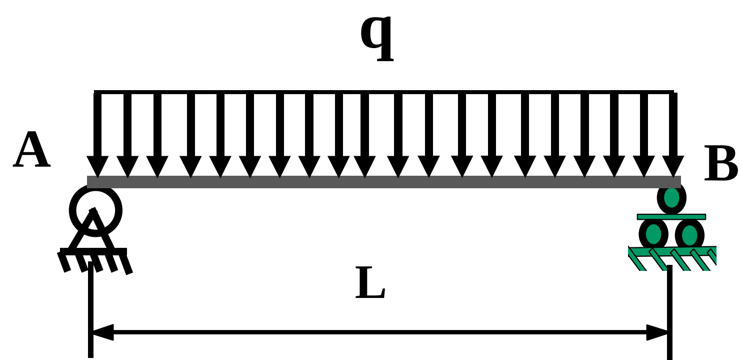






例：矩形截面木檩条如图，屋架间距 L=3.3m,上弦杆的坡度为 α。受屋面传来的载荷（如瓦、板的重力） q=800N/m 。材料的[σ]=12MPa，容许挠度为：L/200 ，E = 9 GPa，试校核此梁的强度和刚度。

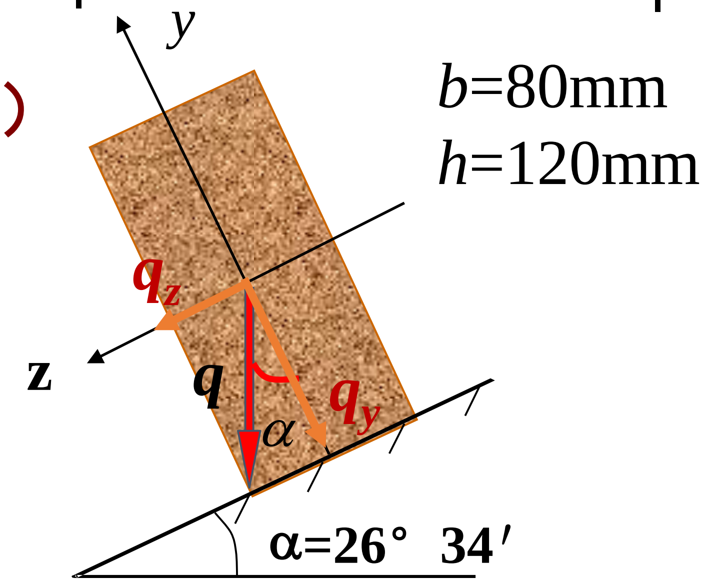
解：1、外力分解简化



$$q_z = q\sin\alpha = 800\times0.447 = 358\text{N/m}$$

$$q_y = q\cos\alpha = 800\times0.894 = 714\text{N/m}$$

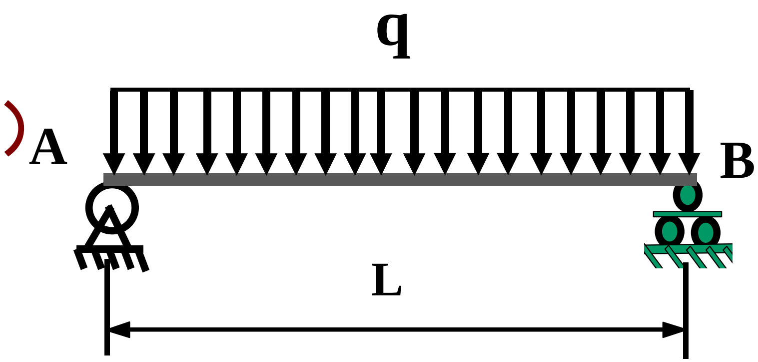
2、内力分析（危险截面为跨中截面）



$$M_{z\max} = \frac{q_y L^2}{8} = \frac{714\times3.3^2}{8} = 972\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_{y\max} = \frac{q_z L^2}{8} = \frac{358\times3.3^2}{8} = 487\text{N}\cdot\text{m}$$

例： 矩形截面木檩条如图，屋架间距 L=3.3m,上弦杆的坡度为 α。受屋面传来的载荷（如瓦、板的重力） q=800N/m 。材料的 [σ]=12MPa，容许挠度为：L/200 ，E = 9 GPa，试校核此梁的强度和刚度。



2、内力分析（危险截面为跨中截面）

$$M_{z\max} = \frac{q_y L^2}{8} = \frac{714\times3.3^2}{8} = 972\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$M_{y\max} = \frac{q_z L^2}{8} = \frac{358\times3.3^2}{8} = 487\ \mathrm{N\cdot m}$$

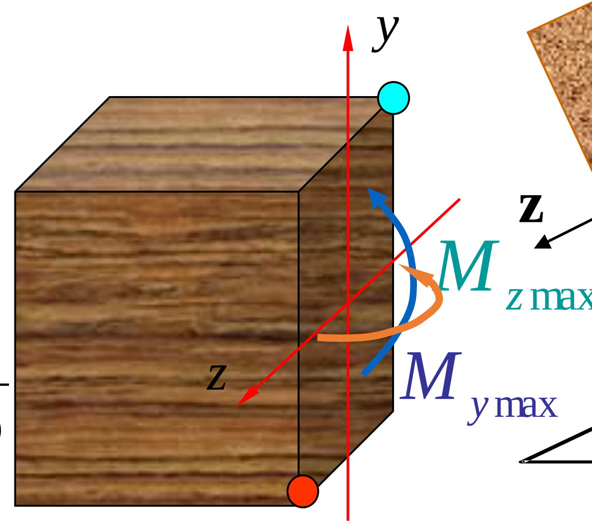
3、强度计算

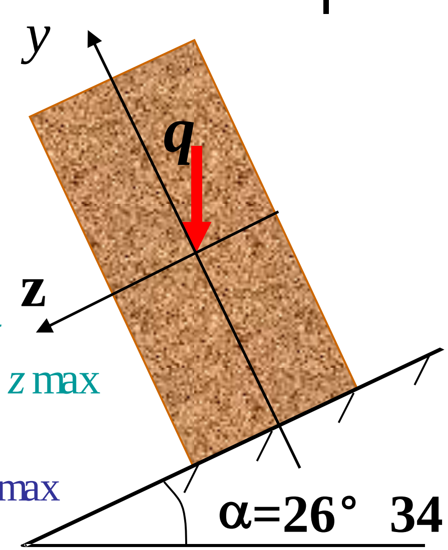
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} + \frac{M_{y\max}}{W_y}$$

$$= \frac{972}{\frac{1}{6}\times80\times120^2\times10^{-9}} + \frac{487}{\frac{1}{6}\times120\times80^2\times10^{-9}}$$

$$= 8.86(\mathrm{MPa}) \le [\sigma]$$

此梁的强度足够

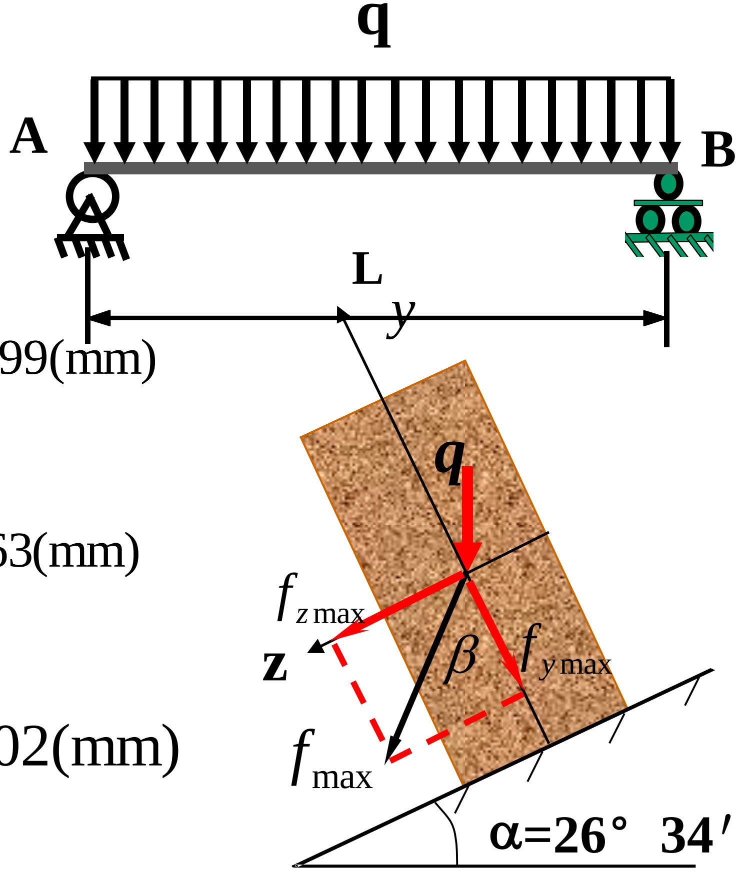




b=80mm

h=120mm

例：矩形截面木檩条如图，屋架间距 L=3.3m,上弦杆的坡度为 α。受屋面传来的载荷（如瓦、板的重力）q=800N/m 。材料的 [σ]=12MPa，容许挠度为：L/200 ，E = 9 GPa，试校核此梁的强度和刚度。



4、刚度计算

$$f_{z\max} = \frac{5q_z L^4}{384EI_y} = \frac{5\times 358\times 10^{-3}}{384\times 9\times 10^3\times \frac{1}{12}120\times 80^3} = 11.99(\text{mm})$$

$$f_{y\max} = \frac{5q_y L^4}{384EI_z} = \frac{5\times 714\times 10^{-3}}{384\times 9\times 10^3\times \frac{1}{12}80\times 120^3} = 10.63(\text{mm})$$

$$f_{\max} = \sqrt{f_{z\max}^2 + f_{y\max}^2} = \sqrt{11.99^2 + 10.63^2} = 16.02(\text{mm})$$

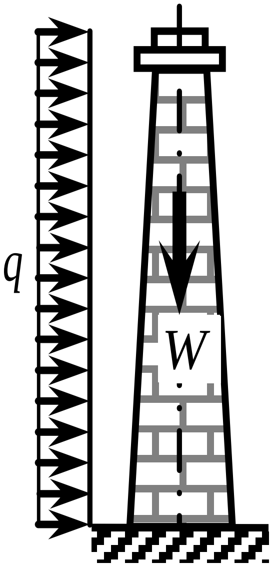
$$f_{\max} = 16.02(\text{mm}) < [f] = \frac{3.3\times 10^3}{200} = 16.5(\text{mm})$$

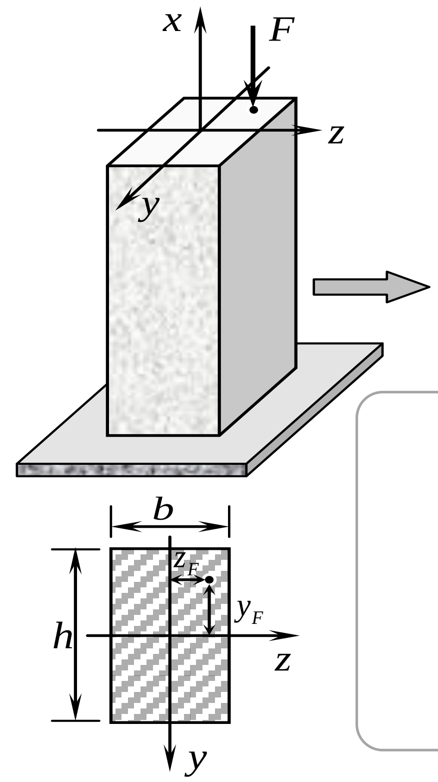
此梁的刚度足够

$$\tan\beta = \frac{f_z}{f_y} = \frac{11.99}{10.63} \qquad \beta = 48.44^{\circ} \neq \alpha$$

轴向拉(压)与弯曲组合 偏心拉压

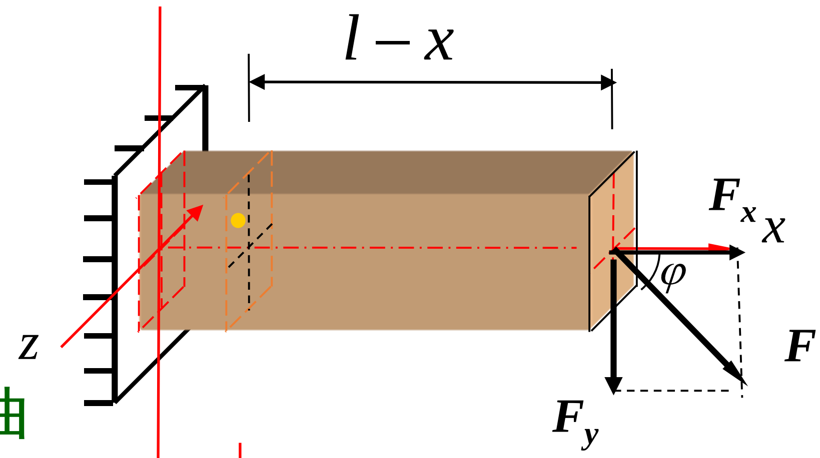
轴向拉（压）与弯曲组合——工程中常见的组合变形





(a)

一、拉(压)弯组合变形的计算



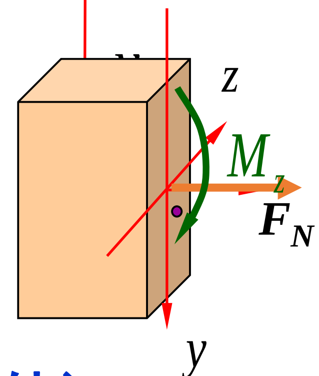
1、载荷的分解

$$F \Rightarrow \begin{cases} F_x = F\cos\varphi \\ F_y = F\sin\varphi \end{cases}$$

F_x 产生轴向拉伸

F_y 产生 xy 平面以 z为中性轴的平面弯曲

2、横截面的内力

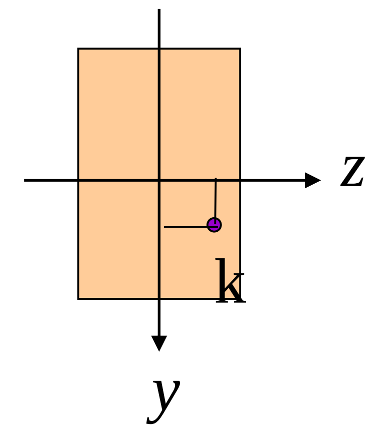


$$F_N(x) = F_x = F\cos\varphi$$

$$M_z(x) = F\sin\varphi(l-x)$$

本题中，危险截面为固定端截面（$x = 0$ 处）

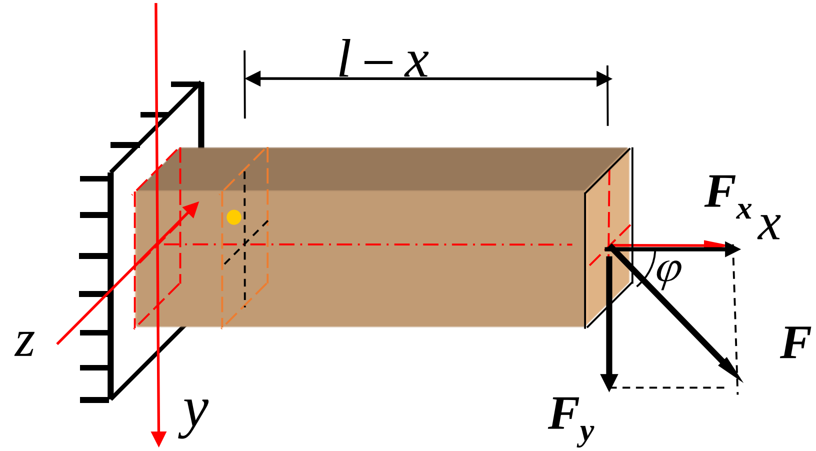
3、横截面上 k 点的应力



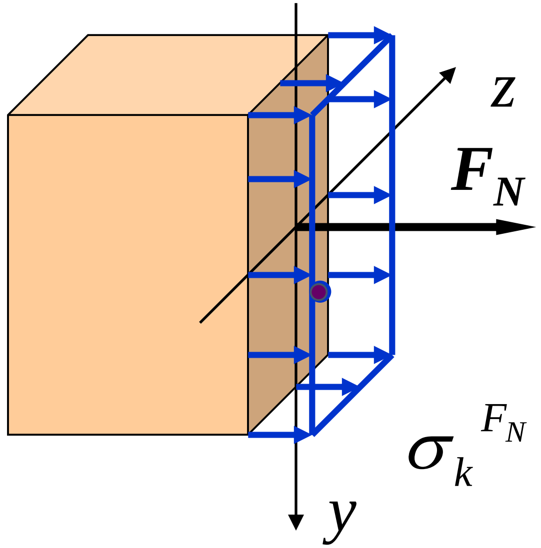
$$\sigma_k^{F_N} = \frac{F_N(x)}{A}, \qquad \sigma_k^{M_z} = -\frac{M_z(x)y_k}{I_z}$$

$$\sigma_k = \sigma_k^{F_N} + \sigma_k^{M_z}$$

横截面正应力的叠加

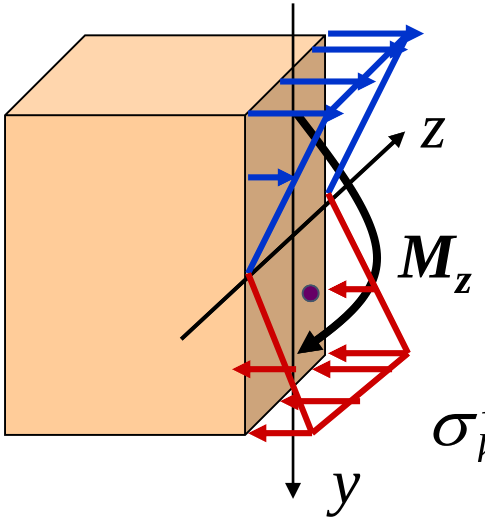


在 F_N 作用下：



$$\sigma_k^{F_N} = \frac{F_N(x)}{A}$$

在 M_z 作用下：

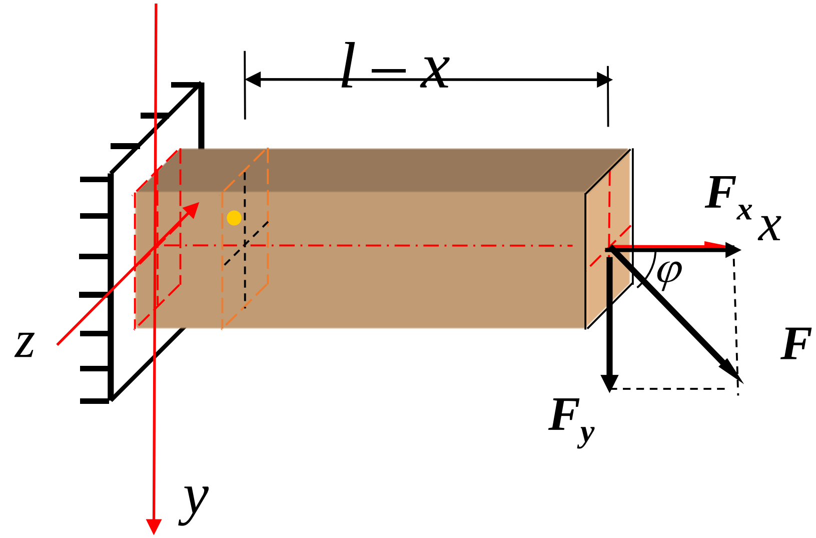


$$\sigma_k^{M_z} = -\frac{M_z(x)y_k}{I_z}$$

叠加：
$$\sigma_k = \sigma_k^{F_N} + \sigma_k^{M_z} = \frac{F_N(x)}{A} - \frac{M_z(x)y_k}{I_z}$$

4、强度计算

由 $$F_N(x)=F_x=F\cos\varphi$$ $$M_z(x)=F\sin\varphi(l-x)$$ 可知

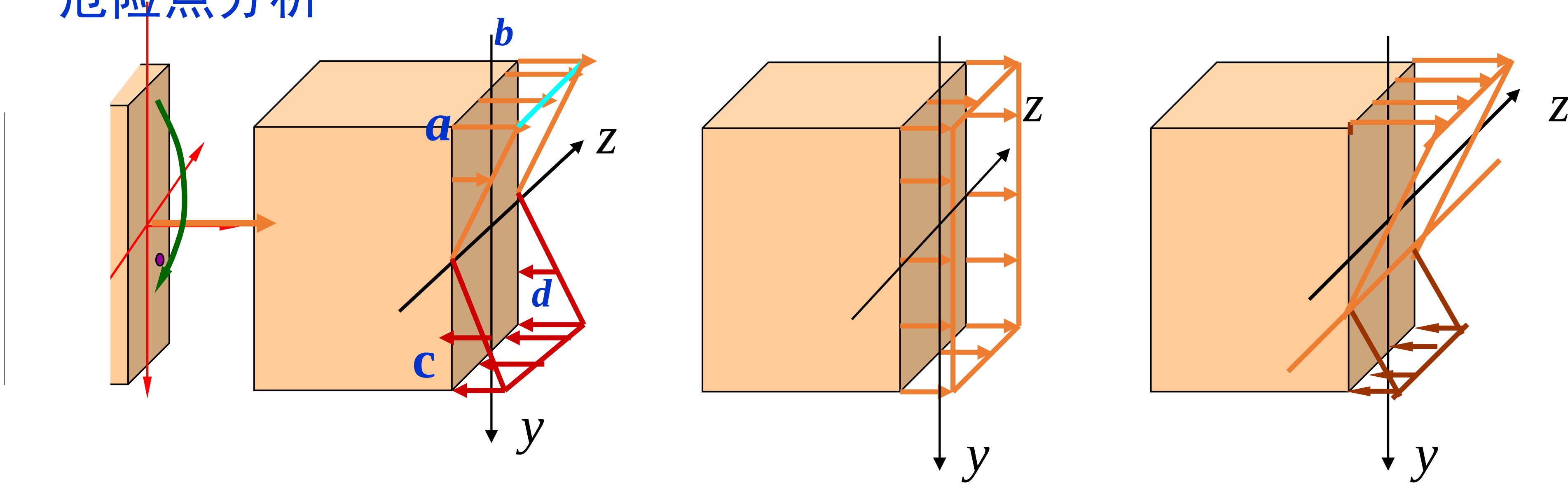


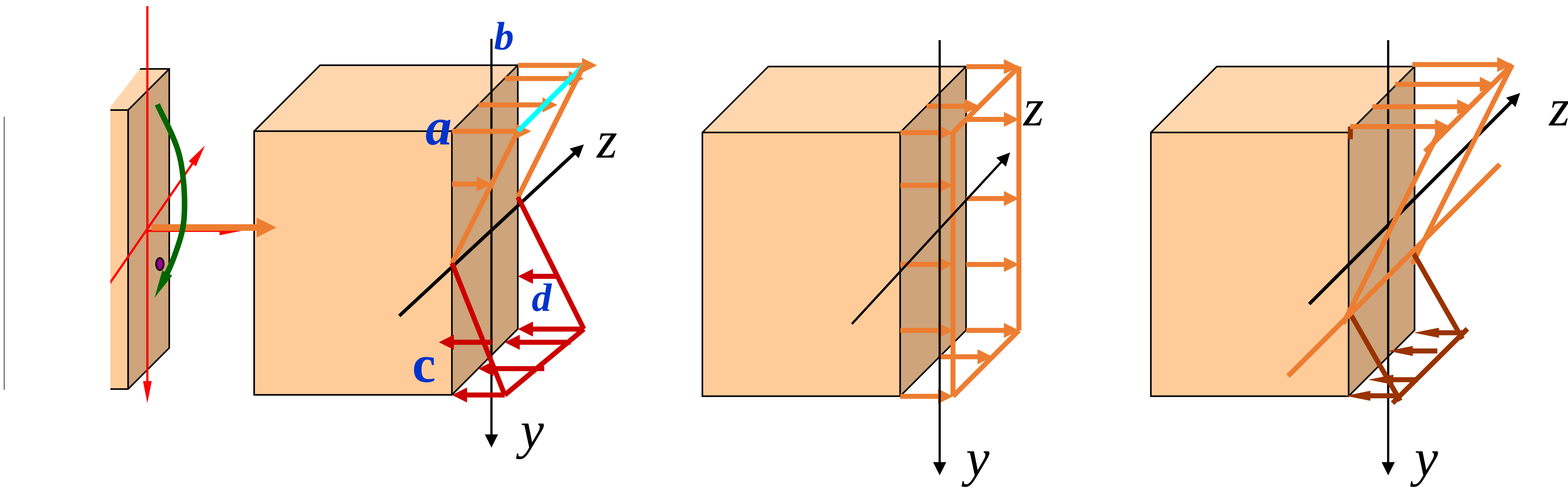
危险截面为固定端截面（$x=0$ 处）

$$F_N=F\cos\varphi$$

$$M_{z\max}=F\sin\varphi\times l$$

危险点分析





危险截面——固定端截面 $F_N = F\cos\varphi$ $M_{z\max} = F\sin\varphi \times l$

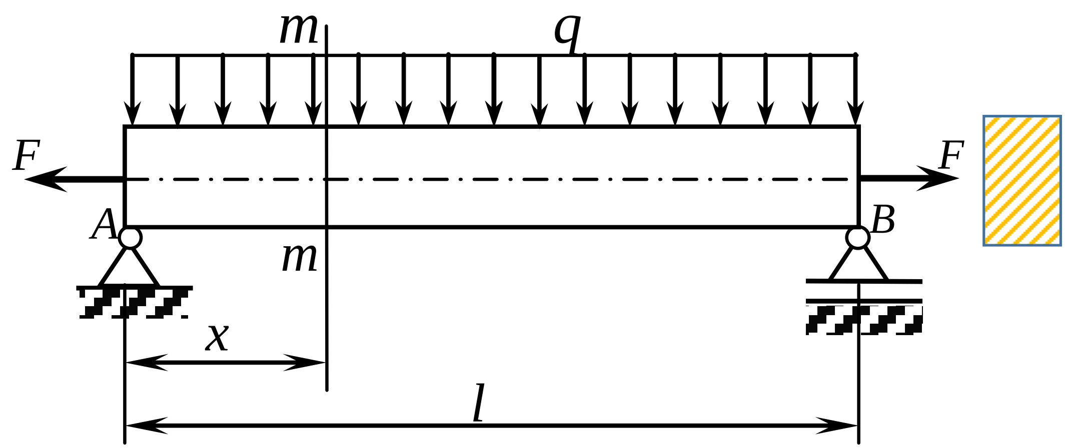
危险点——*ab* 边各点有最大的拉应力，

cd 边各点有最大的压应力（或最小拉应力）。

$$\sigma_{t\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} + \frac{F_N}{A} \qquad \sigma_{c\max} = -\frac{M_{z\max}}{W_z} + \frac{F_N}{A}$$

强度条件（危险点处于简单应力状态）—— $\sigma_{\max} \le [\sigma]$

例 图示矩形截面梁在水平拉力和竖向均布力共同作用下产生拉伸与弯曲组合变形。



1、载荷的分解

q 使梁发生平面弯曲

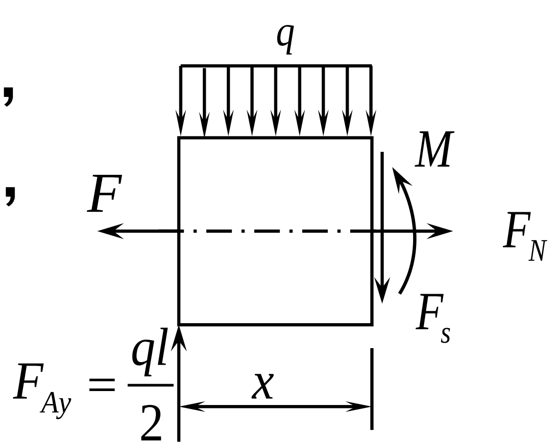
F 产生轴向拉伸

2、内力分析

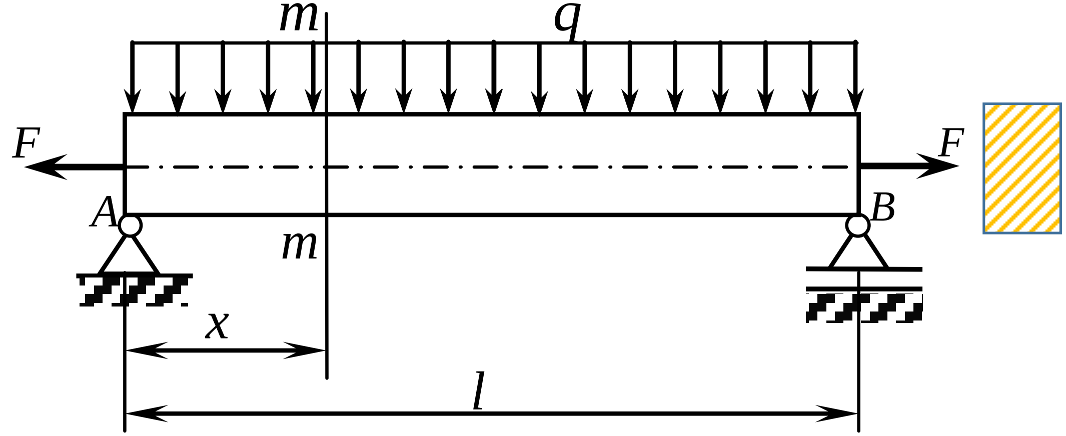
在任意横截面$m\text{–}m$上，

内力: 轴力、弯矩和剪力，

由于剪力的作用甚小,常忽略不计，从而只考虑轴力和弯矩的作用。



例 图示矩形截面梁在水平拉力和竖向均布力共同作用下产生拉伸与弯曲组合变形。



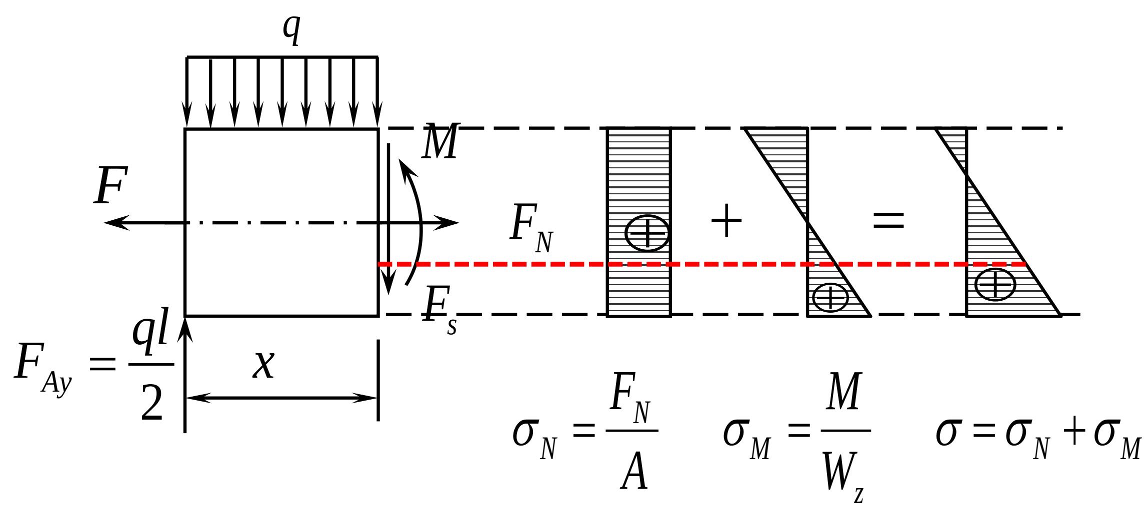
2. 应力分析

轴力引起的正应力在截面上是均匀分布的，而弯矩引起的正应力呈线性分布

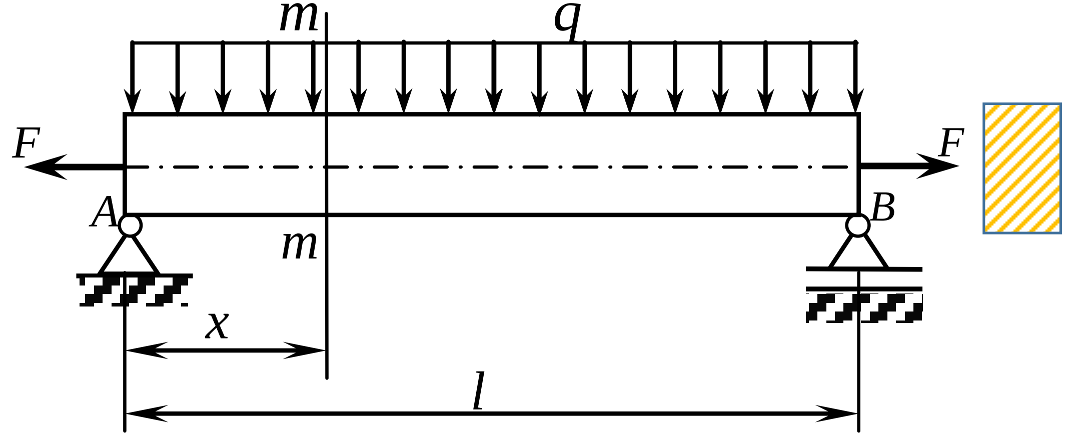
将两种应力叠加，截面上离中性轴距离为 y 处的应力为

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M$$

$$= \frac{F_N}{A} + \frac{M}{I_z} y$$



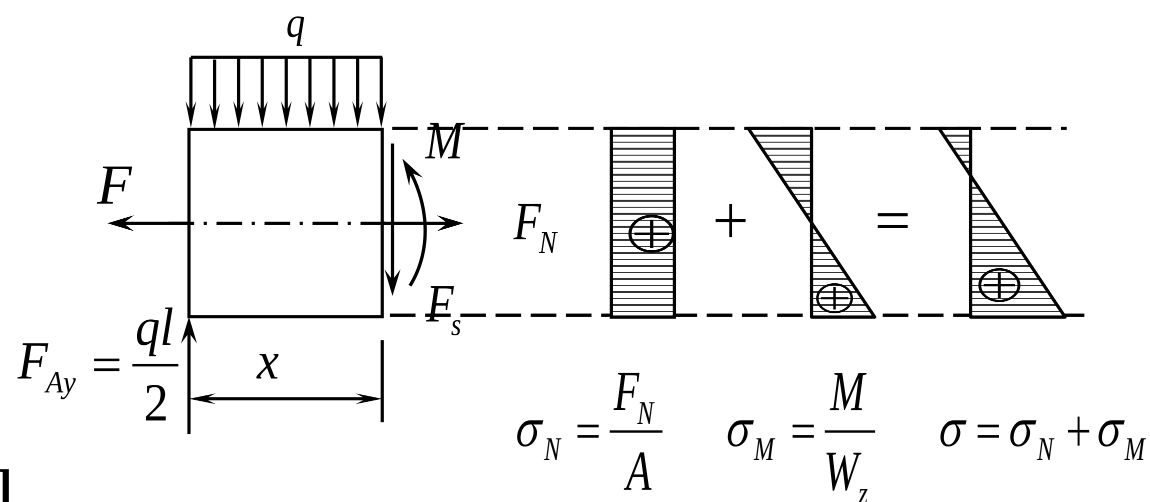
例 图示矩形截面梁在水平拉力和竖向均布力共同作用下产生拉伸与弯曲组合变形。



3、强度分析

最大正应力发生在弯矩最大的横截面上且离中性轴最远的下边缘和上边缘处，其计算式为

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{F_N}{A} \pm \frac{M_{\max}}{W_z}$$



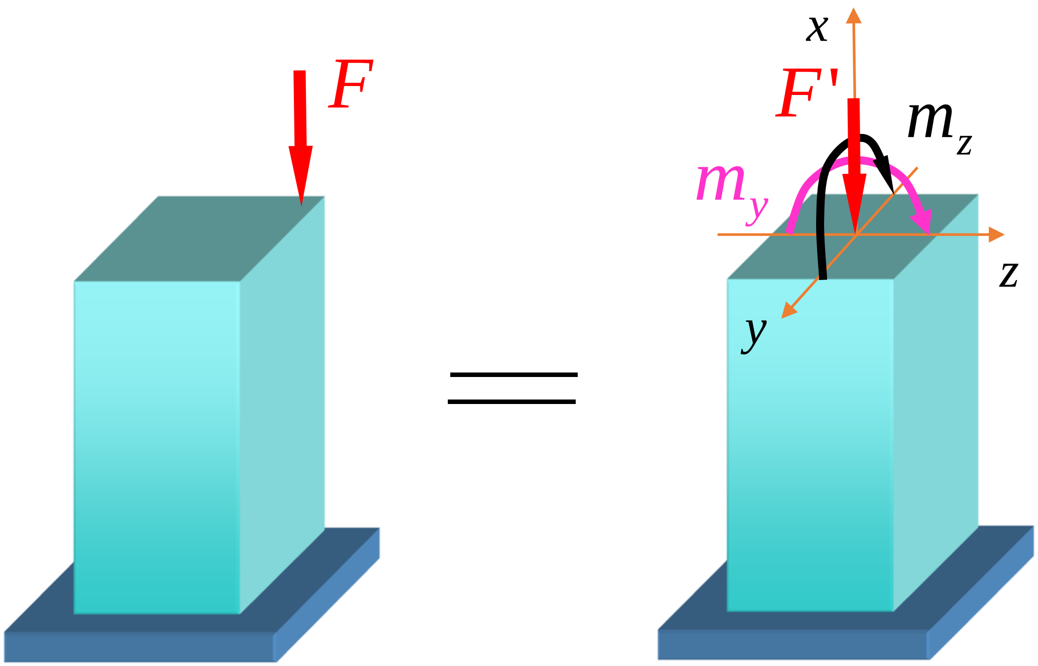
4、建立强度条件

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{F}{A} \pm \frac{\frac{ql^2}{8}}{W_z} \le [\sigma]$$

二、偏心拉(压)

1、偏心拉(压)的概念

作用在杆件上的外力与杆的轴线平行但不重合。



偏心压缩 = 压缩 + 两个形心主惯性平面的平面弯曲