

## 第 13 讲 函数的应用

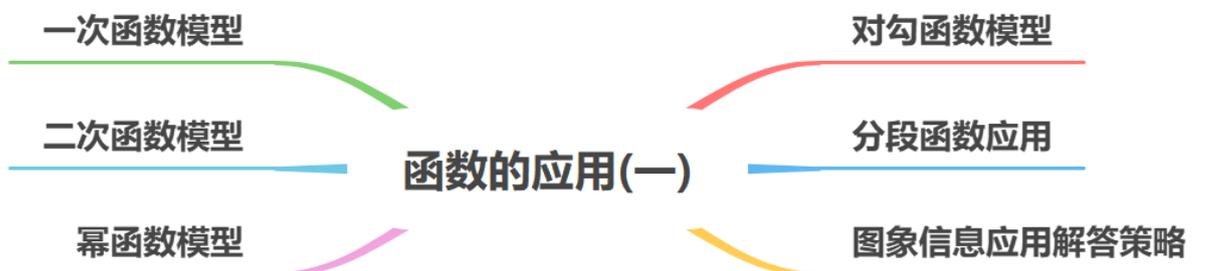
### 模块导航

- 模块一 思维导图串知识
- 模块二 基础知识全梳理（吃透教材）
- 模块三 核心考点举一反三
- 模块四 小试牛刀过关测

### 素养目标

1. 了解函数模型(如一次函数、二次函数、分段函数等在社会生活中普遍使用的函数模型)的广泛应用;
2. 能够利用给定的函数模型或建立确定的函数模型解决实际问题.

#### ◇ 模块一 思维导图串知识

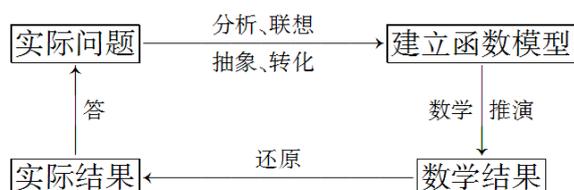


#### ◇ 模块二 基础知识全梳理

##### 知识点 1 一次函数模型

- 1、一次函数为:  $y = kx + b (k \neq 0)$
- 2、求最值的方法: 常转化为求解不等式  $ax + b \geq 0$  (或  $\leq 0$ ), 解答时, 注意系数  $a$  的正负, 也可以结合函数图象或其单调性来求最值.
- 3、解决实际应用问题的一般步骤
  - (1) 审题: 弄清题意, 分清条件和结论, 理顺数量关系, 初步选择数学模型;
  - (2) 建模: 将自然语言转化为数学语言, 将文字语言转化为符号语言, 利用数学知识, 建立相应的数学模型;
  - (3) 求模: 求解数学模型, 得出数学结论;
  - (4) 还原: 将数学问题还原为实际问题.

以上过程用框图表示如图:



##### 知识点 2 二次函数模型

- 1、二次函数：形如  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$
- 2、求最值的方法：在根据实际问题建立函数解析式后，可利用配方法、判别式法、换元法、函数的单调性等方法来求函数的最值，从而解决实际问题中的最值问题.二次函数求最值最好结合二次函数的图象来解答.
- 3、解决实际应用问题的注意事项
  - (1) 函数模型应用不当，是常见的解题错误. 所以，要理解题意，选择适当的函数模型.
  - (2) 要特别关注实际问题的自变量的取值范围，合理确定函数的定义域.
  - (3) 注意问题反馈，在解决函数模型后，必须验证这个数学解对实际问题的合理性.

### 知识点 3 三、幂函数模型

- 1、幂函数模型为  $y = ax^n + b (a, b \text{ 为常数}, a \neq 0)$ ,
- 2、在计算幂函数解析式、求幂函数最值的时候，通常利用幂函数的图象、单调性、奇偶性等解题.

### 知识点 4 对勾函数模型

解决“对勾”函数  $f(x) = ax + \frac{b}{x} (a > 0, b > 0)$  的实际应用问题时，需关注该函数的定义域、单调性、值域和图象等，一般通过变形，构造利用基本不等式的条件求最值。

### 知识点 5 应用分段函数时的三个注意点

- 1、分段函数的“段”一定要分得合理，不重不漏；
- 2、分段函数的定义域为对应每一段自变量取值范围的并集；
- 3、分段函数的值域求法为逐段求函数值的范围，最后比较再下结论。

### 知识点 6 图像信息应用题的解答策略

- 1、明确横轴、纵轴的意义，分析题中的具体含义；
- 2、由图象判定函数模型；
- 3、抓住特殊点的实际意义，特殊点一般包括最高点（最大值点）、最低点（最小值点）及折线的拐角点等；
- 4、通过方程、不等式、函数等数学模型化实际问题。

## ◇ 模块三 核心考点举一反三



**考点一：一次函数模型的应用**



例 1. (22-23 高一上·北京·期中) 果蔬批发市场批发某种水果，不少于 100 千克时，批发价为每千克 2.5 元，小王携带现金 3000 元到市场采购这种水果，并以此批发价买进，如果购买的水果为  $x$  千克，小王付款后剩余现金为  $y$  元，则  $x$  与  $y$  之间的函数关系为 ( )

- A.  $y = 3000 - 100x$  ( $100 < x < 1200$ )
- B.  $y = 3000 - 100x$  ( $100 \leq x \leq 1200$ )
- C.  $y = 3000 - 2.5x$  ( $100 \leq x \leq 1200$ )
- D.  $y = 3000 - 2.5x$  ( $100 < x < 1200$ )

【变式 1-1】(22-23 高一上·浙江·期中) 某商场在国庆期间举办促销活动，规定：顾客购物总金额不超过 400 元，不享受折扣；若顾客的购物总金额超过 400 元，则超过 400 元部分分两档享受折扣优惠，折扣率如下表所示：

可享受折扣优惠的金额	折扣率
不超过 400 元部分	5%
超过 400 元部分	15%

若某顾客获得 65 元折扣优惠，则此顾客实际所付金额为 ( )

- A. 935 元
- B. 1000 元
- C. 1035 元
- D. 1100 元

【变式 1-2】(23-24 高一·全国·单元测试) (多选) 某部影片的盈利额(即影片的票房收入与固定成本之差)记为  $y$ ，观影人数记为  $x$ ， $y$  关于  $x$  的函数图像如图 (1) 所示. 由于目前该片盈利未达到预期，相关人员提出了两种调整方案，图 (2)、图 (3) 中的实线分别为调整后  $y$  关于  $x$  的函数图像. 给出下列四种说法，其中正确的说法是 ( )

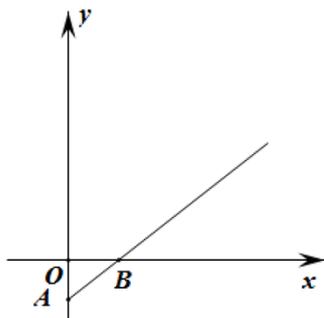


图 (1)

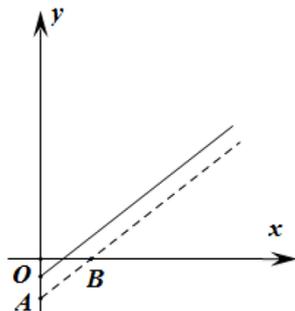


图 (2)

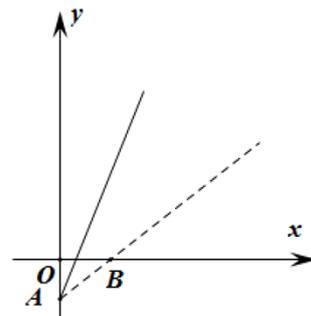


图 (3)

- A. 图 (2) 对应的方案是：提高票价，并提高固定成本
- B. 图 (2) 对应的方案是：保持票价不变，并降低固定成本
- C. 图 (3) 对应的方案是：提高票价，并保持固定成本不变
- D. 图 (3) 对应的方案是：提高票价，并降低固定成本

**【变式 1-3】** (23-24 高一上·云南保山·开学考试) 为落实“绿水青山就是金山银山”的发展理念，某市政部门招标一工程队负责在山脚下修建一座水库的土方施工任务.该工程队有  $A, B$  两种型号的挖掘机，已知 3 台  $A$  型和 5 台  $B$  型挖掘机同时施工一小时挖土 165 立方米；4 台  $A$  型和 7 台  $B$  型挖掘机同时施工一小时挖土 225 立方米.每台  $A$  型挖掘机一小时的施工费用为 300 元，每台  $B$  型挖掘机一小时的施工费用为 180 元.

- (1) 分别求每台  $A$  型， $B$  型挖掘机一小时挖土多少立方米？
- (2) 若不同数量的  $A$  型和  $B$  型挖掘机共 12 台同时施工 4 小时，至少完成 1080 立方米的挖土量，且总费用不超过 12960 元.问施工时有哪几种调配方案，并指出哪种调配方案的施工费用最低，最低费用是多少元？

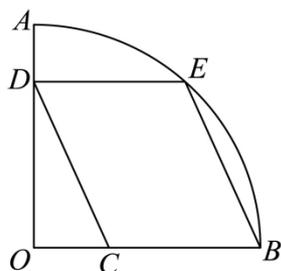
**考点二：二次函数模型的应用**



**例 2.** (23-24 高一上·北京东城·期末) 把长为 8cm 的细铁丝截成两段，各自围成一个正方形，那么这两个正方形面积之和的最小值是 ( )

- A.  $4\text{cm}^2$
- B.  $3\text{cm}^2$
- C.  $2\sqrt{2}\text{cm}^2$
- D.  $2\text{cm}^2$

**【变式 2-1】** (23-24 高一下·广东梅州·期中) 如图，在扇形  $OAB$  中，半径  $OA = 4$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $C$  在半径  $OB$  上， $D$  在半径  $OA$  上， $E$  是扇形弧上的动点 (不包含端点)，则平行四边形  $BCDE$  的周长的取值范围是\_\_\_\_\_.



【变式 2-2】(23-24 高一上·湖南衡阳·月考) 某工厂 2022 年年初用 100 万元购进一台新的设备, 并立即投入使用, 该设备使用后, 每年的总收入预计为 50 万元. 设使用  $x$  年后该设备的维修、保养费用为  $2x^2 + 5x$  ( $x \in \mathbb{N}^*$ ) 万元, 盈利总额为  $y$  万元.

- (1) 写出  $y$  与  $x$  之间的函数关系式;
- (2) 从第几年开始, 使用该设备开始盈利?

【变式 2-3】(23-24 高一上·广东佛山·月考) 某商场销售 A 型商品, 已知该商品的进价是每件 3 元, 且销售单价与日均销售量的关系如表所示:

销售单价 (元)	4	5	6	7	8	9	10
日均销售量 (件)	400	360	320	280	240	200	160

请根据以上数据分析, 此商品如何定价 (单位: 元/件), 该商品的日均销售利润最大? 并求日均销售利润的最大值.

### 考点三: 幂函数模型的应用



例 3. (23-24 高二下·上海·月考) 某企业欲实现在今后 10 年内产值翻两翻的目标,

则该企业年产值的年平均增长率为\_\_\_\_\_ (结果精确到 0.001)

【变式 3-1】(23-24 高一上·全国·专题练习) 异速生长规律描述生物的体重与其它生理属性之间的非线性数量关系通常以幂函数形式表示. 比如, 某类动物的新陈代谢率  $y$  与其体重  $x$  满足  $y = kx^\alpha$ , 其中  $k$  和  $\alpha$  为正常数, 该类动物某一个体在生长发育过程中, 其体重增长到初始状态的 16 倍时, 其新陈代谢率仅提高到初始状态的 8 倍, 则  $\alpha$  为 ( )

- A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\frac{2}{3}$       D.  $\frac{3}{4}$

【变式 3-2】(23-24 高一上·全国·练习) 2020 年底, 国务院扶贫办确定的贫困县全部脱贫摘帽, 脱贫攻坚取得重大胜利! 为进一步巩固脱贫攻坚成果, 持续实施乡村振兴战略, 某企业响应政府号召, 积极参与帮扶活动. 该企业 2021 年初有资金 150 万元, 资金的年平均增长率固定, 每三年政府将补贴 10 万元. 若要实现 2024 年初的资金达到 270 万元的目标, 资金的年平均增长率应为 (参考值:  $\sqrt[3]{1.82} \approx 1.22, \sqrt[3]{1.73} \approx 1.2$ ) ( )

- A. 10%      B. 20%      C. 22%      D. 32%

【变式 3-3】(23-24 高一下·上海闵行·期末) 银行按规定每经过一定的时间结算存(贷)款的利息一次, 结算后将利息并入本金, 这种计算利息的方法叫做复利. 现在某企业进行技术改造, 有两种方案:

甲方案: 一次性向银行贷款 10 万元, 技术改造后第一年可获得利润 1 万元, 以后每年比上年增加 30% 的利润;

乙方案: 每年向银行贷款 1 万元, 技术改造后第一年可获得利润 1 万元, 以后每年比前一年多获利 5000 元.

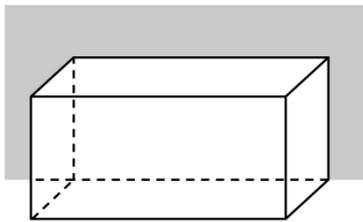
(1) 设技术改造后, 甲方案第  $n$  年的利润为  $a_n$  (万元), 乙方案第  $n$  年的利润为  $b_n$  (万元), 请写出  $a_n$ 、 $b_n$  的表达式;

(2) 假设两种方案的贷款期限都是 10 年, 到期一次性归还本息. 若银行贷款利息均以年息 10% 的复利计算, 试问该企业采用哪种方案获得的扣除本息后的净获利更多? (精确到 0.1) (净获利=总利润-本息和) (参考数据  $1.1^{10} \approx 2.594$ ,  $1.3^{10} \approx 13.79$ )

#### 考点四: 对勾函数模型的应用

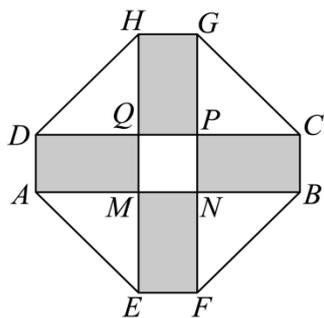


例 4. (22-23 高一上·安徽马鞍山·期中) 如图, 安工大附中欲利用原有的墙(墙足够长)为背面, 建造一间长方体形状的房屋作为体育器材室. 房屋地面面积为  $18\text{m}^2$ , 高度为 3m. 若房屋侧面和正面每平方米的造价均为 1000 元, 屋顶的造价为 6000 元, 且不计房屋背面和地面的费用, 则该房屋的最低总造价为\_\_\_\_\_元.



【变式 4-1】(23-24 高一上·湖北孝感·月考) 一家货物公司计划租地建造仓库储存货物, 经过市场调查了解到下列信息: 每月土地占地费  $y_1$  (单位: 万元) 与仓库到车站的距离  $x$  (单位: km) 成反比, 每月库存货物费  $y_2$  (单位: 万元) 与  $x$  成正比; 若在距离车站 10km 处建仓库, 则  $y_1$  和  $y_2$  分别为 4 万元和 9 万元, 为了能使两项费用之和最小, 这家公司应该把仓库建在距离车站\_\_\_\_\_千米处.

【变式 4-2】(23-24 高一上·江苏宿迁·期末) 如图, 某居民小区要建一座八边形的休闲场所, 它的主体造型平面图是由两个相同的矩形  $ABCD$  和  $EFGH$  构成的面积为  $400\text{m}^2$  的十字形地域. 计划在正方形  $MNPQ$  上建一座花坛, 造价为  $1000$  元/ $\text{m}^2$ ; 在四个相同的矩形 (图中阴影部分) 上铺花岗岩地坪, 造价为  $400$  元/ $\text{m}^2$ ; 在四个空角 (图中四个三角形) 上铺草坪, 造价为  $200$  元/ $\text{m}^2$ . 设  $AD$  长为  $x$  (单位: m).



- (1) 用  $x$  表示  $AM$  的长度, 并求  $x$  的取值范围;
- (2) 当  $AD$  的长为何值时, 总造价最低? 最低总造价是多少?

【变式 4-3】(23-24 高一下·湖北·开学考试) 某甜品店今年年初花费 21 万元购得一台新设备, 经估算该设备每年可为甜品店提供 12 万元的总收入, 已知使用  $x$  年 ( $x \in \mathbb{N}^*$ ) 所需的总维护费用为  $x^2 + 2x$  万元.

- (1) 该甜品店第几年开始盈利?
- (2) 若干年后, 该甜品店计划以 2 万的价格卖出设备, 有以下两种方案:
  - ① 当年平均盈利最大时卖出;
  - ② 当盈利总额达到最大时卖出;

试问哪一方案较为划算？说明理由.

### 考点五：分段函数模型的应用



例 5. (23-24 高一下·江西赣州·期中) 春天, 时令水果草莓上市了, 某水果店统计了草莓上市以来前两周的销售价格  $y$  (元/盒) 与时间  $t$  (天) 的关系:

$$y = \begin{cases} 26, & t = 1, 2, 3, \\ 22, & t = 4, 5, 6, 7, 8, \\ 18, & t = 9, 10, 11, 12, 13, 14. \end{cases}$$

一位顾客在这两周里在该水果店购买了若干盒草莓, 总共消费

212 元, 其中在后 6 天买了 4 盒, 则前 8 天一共买了 ( )

- A. 7 盒                  B. 6 盒                  C. 5 盒                  D. 4 盒

【变式 5-1】(23-24 高一上·江苏宿迁·期中) 新能源汽车是低碳生活的必然选择和汽车产业的发展趋势. 某汽车企业为了响应国家号召, 2020 年积极引进新能源汽车生产设备, 通过分析, 全年需要投入固定成本 2000 万元. 每生产  $x$  (百辆) 新能源汽车, 需另投入成本  $C(x)$  万

元, 且  $C(x) = \begin{cases} 10x^2 + 100x, & 0 < x < 50 \\ 501x + \frac{8100}{x} - 5000, & x \geq 50 \end{cases}$ , 由市场调研知, 每辆车售价 5 万元, 且生产的车

辆当年能全部销售完.

(1) 求出 2020 年的利润  $L(x)$  (万元) 关于年产量  $x$  (百辆) 的函数关系式; (利润 = 销售量 × 售价 - 成本)

(2) 2020 年产量为多少百辆时, 企业所获利润最大? 并求出最大利润.

【变式 5-2】(23-24 高一上·江西宜春·期末) 某医疗器械公司为了进一步增加市场竞争力, 计划改进技术生产某产品. 已知生产该产品的年固定成本为 200 万元, 最大产能为 100

台. 每生产  $x$  台, 需另投入成本  $G(x)$  万元, 且  $G(x) = \begin{cases} x^2 + 120x, & 0 < x \leq 50 \\ 201x + \frac{4900}{x} - 2100, & 50 < x \leq 100 \end{cases}$ , 由

市场调研知, 该产品每台的售价为 200 万元, 且全年内生产的该产品当年能全部销售完.

(1) 写出年利润  $W(x)$  万元关于年产量  $x$  台的函数解析式 (利润 = 销售收入 - 成本);

(2)当该产品的年产量为多少时，公司所获利润最大？最大利润是多少？

【变式 5-3】(23-24 高一上·内蒙古呼和浩特·期中)某乡镇为了打造“网红”城镇发展经济，因地制宜的将该镇打造成“生态水果特色小镇”.经调研发现：某珍惜水果树的单株产量  $W$  (单位：千克) 与施用肥料  $x$  (单位：千克) 满足如下关系：

$$W(x) = \begin{cases} 5(x^2 + 3), & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{50x}{1+x}, & 2 < x \leq 5 \end{cases}, \text{肥料}$$

成本投入为  $10x$  元，其它成本投入（如培育管理、施肥等人工费） $20x$  元.已知这种水果的市场售价大约 15 元/千克，且销售畅通供不应求，记该水果单株利润为  $f(x)$  (单位：元)

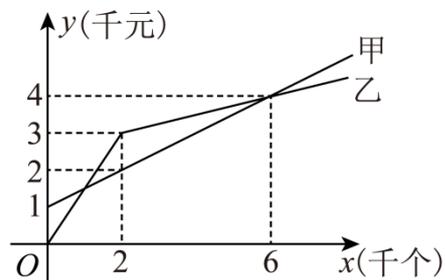
(1)写单株利润  $f(x)$  (元) 关于施用肥料  $x$  (千克) 的关系式；

(2)当施用肥料为多少千克时，该水果单株利润最大?最大利润是多少?

### 考点六：图象信息综合应用题



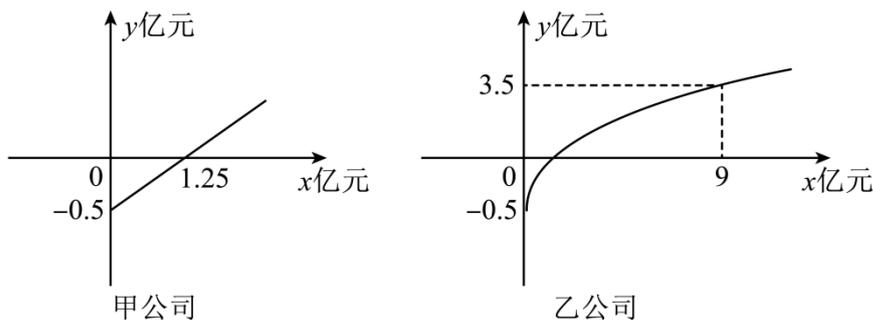
例 6. (23-24 高一上·全国·期末)某单位准备印制一批证书，现有两个印刷厂可供选择，甲厂费用分为制版费和印刷费两部分，先收取固定的制版费，再按印刷数量收取印刷费；乙厂直接按印刷数量收取印刷费，甲、乙两厂的总费用  $y$  (千元) 与印制证书数量  $x$  (千个) 的函数图像分别如图中甲、乙所示，则下列说法正确的是 ( )



- A. 选择甲厂比较划算
- B. 选择乙厂比较划算
- C. 若该单位需印制证书数量为 8 千个，则选择乙厂比较划算
- D. 当该单位需印制证书数量小于 2 千个时，不管选择哪个厂，总费用都一样

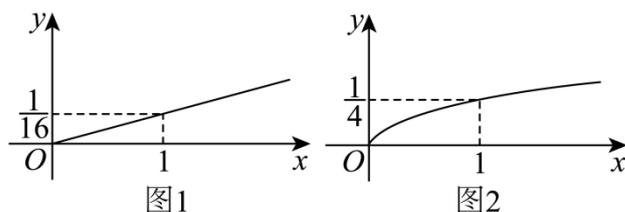
【变式 6-1】(22-23 高一下·湖北武汉·期末)2023 年 4 月 18 日，我国自行研制具有完全自

主知识产权的喷气式支线客机 ARJ21 完成了在印尼首航，这是 ARJ21 在海外市场商业运行的首秀，标志着国产新支线客机 ARJ21 在海外商业运营迈开第一步。中国商飞公司为了进一步打开海外市场，需要加大在开创性、创新性探索和实践方面的投入。中国商飞公司旗下甲乙两家公司，各子公司投入与利润的关系如下。甲公司：利润  $y$ （亿元）与投入  $x$ （亿元）成一次函数关系  $y = kx + b (k \neq 0)$ ，乙公司：利润  $y$ （亿元）与投入  $x$ （亿元）成幂函数型关系  $y = m\sqrt{x} + n (m \neq 0)$ ，如图所示。目前，中国商飞总公司准备拿出资金 10 亿元投入到甲、乙两公司，如何分配才能使总利润最大呢？（ ）



- A. 投入甲公司  $\frac{25}{9}$  亿元，投入乙公司  $\frac{65}{9}$  亿元
- B. 投入甲公司  $\frac{65}{9}$  亿元，投入乙公司  $\frac{25}{9}$  亿元
- C. 投入甲公司 0 亿元，投入乙公司 10 亿元
- D. 投入甲公司 10 亿元，投入乙公司 0 亿元

【变式 6-2】(23-24 高一上·云南曲靖·期末) 某家庭进行理财投资，根据长期收益率市场预测，投资债券等稳健型产品的年收益  $f(x)$  与投资额  $x$  成正比，其关系如图 1；投资股票等风险型产品的年收益  $g(x)$  与投资额  $x$  的算术平方根成正比，其关系如图 2。

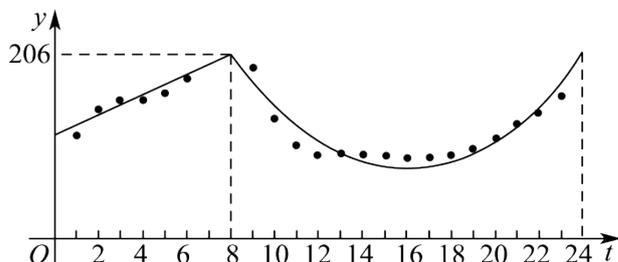


- (1) 分别写出两种产品的年收益  $f(x)$  和  $g(x)$  的函数关系式；
- (2) 该家庭现有 10 万元资金，全部用于理财投资，问：怎么分配资金能使投资获得最大年收益，其最大年收益是多少万元？

【变式 6-3】(23-24 高一上·北京·期中) 为进一步改善空气质量，增强人民的蓝天幸福感，

2018年7月3日,国务院公开发布《打赢蓝天保卫战三年行动计划》,其中京津冀地区被列为重点治理区域.某课外活动小组根据北京市预报的某天(0~24时)空气质量指数数据绘制成散点图,并选择连续函数  $y = \begin{cases} at+118 & 0 \leq t \leq 8 \\ 2t^2 - 64t + b & 8 < t \leq 24 \end{cases}$  来近似刻画空气质量指数  $y$  随时间  $t$

变化的规律(如图).



(1)求  $a, b$  的值;

(2)当空气质量指数大于150时,有关部门建议市民外出活动应戴防雾霾口罩,并禁止某行业施工作业.请你结合该课外活动小组选择的函数模型,回答以下问题:

- (i) 某同学该天7:00出发上学,是否应该戴防雾霾口罩?请说明理由;
- (ii) 试问该天8:00之后,该行业可以施工作业的时间最长为多少小时?

### ◇ 模块四 小试牛刀过关测

#### 一、单选题

1. (23-24 高一上·辽宁大连·月考)某文具店购进一批新型台灯,若按每盏台灯 15 元的价格销售,每天能卖出 30 盏;若售价每提高 1 元,日销售量将减少 2 盏,现决定提价销售,为了使这批台灯每天获得 400 元以上(不含 400 元)的销售收入.则这批台灯的销售单价  $x$ (单位:元)的取值范围是 ( )

- A.  $\{x|10 \leq x < 16\}$
- B.  $\{x|12 \leq x < 18\}$
- C.  $\{x|15 \leq x < 20\}$
- D.  $\{x|10 \leq x < 20\}$

2. (23-24 高一上·江西·月考)你见过古人眼中的烟花吗?那是朱淑真元宵夜的“火树银花触目红”,是隋炀帝眼中的“灯树千光照,花焰七枝开”.烟花,虽然是没有根的花,是虚幻的花,却在达到最高点时爆裂,用其灿烂的一秒换来人们真心的喝彩.已知某种烟花距地面的高度  $h$  (单位:米)与时间  $t$  (单位:秒)之间的关系式为  $h = -3.6t^2 + 28.8t$ ,则烟花在冲击后爆裂的时刻是 ( )

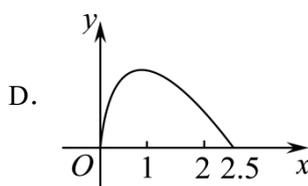
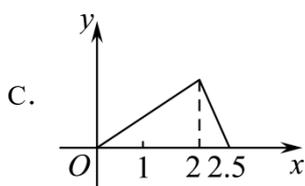
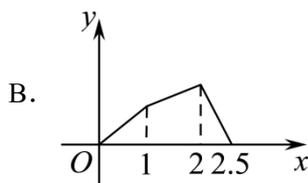
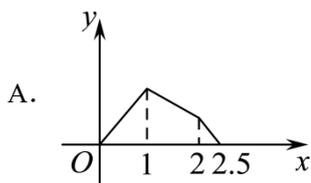
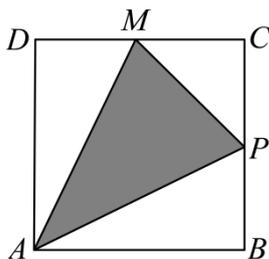
- A. 第 4 秒      B. 第 5 秒      C. 第 3.5 秒      D. 第 3 秒

3. (23-24 高一上·湖北黄冈·期中) 为了保护水资源, 提倡节约用水, 某城市对居民生活用水实行“阶梯水价”. 计费方法如表格所示: 若某户居民本月交纳的水费为 48 元, 则此户居民本月用水量是 ( )

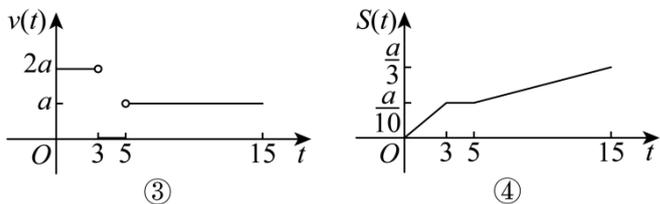
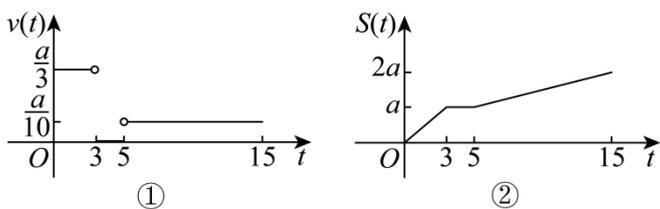
每户每月用水量	水价
不超过 $12\text{m}^3$ 的部分	3 元/ $\text{m}^3$
超过 $12\text{m}^3$ 但不超过 $18\text{m}^3$ 的部分	6 元/ $\text{m}^3$
超过 $18\text{m}^3$ 的部分	9 元/ $\text{m}^3$

- A.  $13\text{m}^3$       B.  $14\text{m}^3$       C.  $15\text{m}^3$       D.  $16\text{m}^3$

4. (23-24 高一上·广东梅州·月考) 如图, 点  $P$  在边长为 1 的正方形边上运动,  $M$  是  $CD$  的中点, 当点  $P$  沿  $A-B-C-M$  运动时, 点  $P$  经过的路程  $x$  与  $\triangle APM$  的面积  $y$  的函数  $y = f(x)$  的图象的形状大致是 ( )

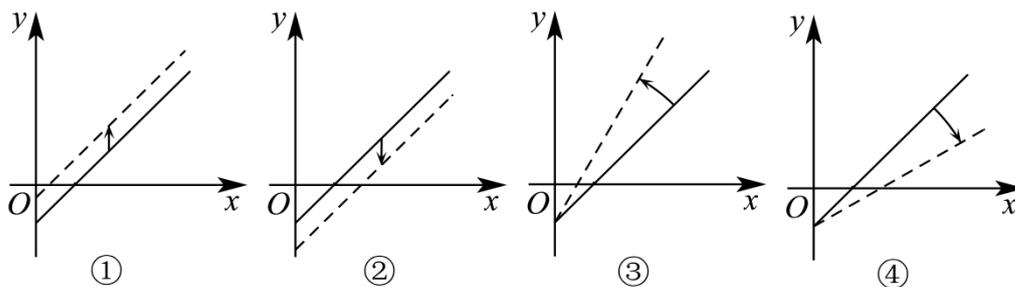


5. (23-24 高一上·江苏南京·期中) 学校宿舍与办公室相距  $am$ . 某同学有重要材料要送交给老师, 从宿舍出发, 先匀速跑步 3min 来到办公室, 停留 2min, 然后匀速步行 10min 返回宿舍. 在这个过程中, 这位同学行进的速度  $v(t)$  和行走的路程  $S(t)$  都是时间  $t$  的函数, 则速度函数和路程函数的示意图分别是下面四个图象中的 ( )



- A. ①②      B. ③④      C. ①④      D. ②③

6. (23-24 高一·全国·专题练习) 南通至通州的某条公共汽车线路收支差额  $y$  与乘容量  $x$  的函数关系如图所示 (收支差额 = 车票收入 - 支出费用). 由于目前本条线路亏损, 公司有关人员提出了两条建议: 建议 (I) 不改变车票价格, 减少支出费用; 建议 (II) 不改变支出费用, 提高车票价格. 下面给出的四个图形中, 实线虚线分别表示目前和建议后的函数关系, 则 ( )



- A. ①反映了建议 (I), ②反映了建议 (II)  
 B. ②反映了建议 (I), ④反映了建议 (II)  
 C. ①反映了建议 (I), ③反映了建议 (II)  
 D. ④反映了建议 (I), ②反映了建议 (II)

二、填空题

7. (23-24 高一下·云南·月考) 某商店销售  $A, B$  两款商品, 利润 (单位: 元) 分别为  $y_1 = -x^2 + 23x$  和  $y_2 = 4x$ , 其中  $x$  为销量 (单位: 袋), 若本周销售两款商品一共 20 袋, 则能获得的最大利润为\_\_\_\_\_.

8. (22-23 高一上·浙江宁波·期中) 某地方政府为鼓励全民创业, 拟对本地年产值  $x \in [100, 500]$  (单位: 万元) 的小微企业进行奖励, 奖励方案为: 奖金  $y$  (单位: 万元) 随企业年产值  $x$  的增加而增加, 且奖金不低于 8 万元, 同时奖金不超过企业年产值的 12%. 若函数  $y = \frac{mx-10}{x+2}$ , 则实数  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

9. (23-24 高一上·安徽马鞍山·期末) 某乡镇为全面实施乡村振兴战略, 大力发展特色农业, 提升特色农产品的知名度, 邀请了一家广告牌制作公司设计一个宽为  $x$  米、长为  $y$  米的长方形展牌, 其中  $y > x$ , 其面积为  $3(x - y + 15)$  平方米.

(1) 求  $y$  关于  $x$  的函数解析式, 并求出  $x$  的取值范围;

(2) 如何设计展牌的长和宽, 才能使展牌的周长最小? 并求出周长的最小值.

10. (23-24 高一上·四川成都·自主招生) 甲、乙两汽车出租公司均有 50 辆汽车对外出租, 下面是两公司经理的一段对话:

甲公司经理: 如果我公司每辆汽车月租费 3000 元, 那么 50 辆汽车可以全部租出. 如果每辆汽车的月租费每增加 50 元, 那么将少租出 1 辆汽车. 另外, 公司为每辆租出的汽车支付月维护费 200 元.

乙公司经理: 我公司每辆汽车月租费 3500 元, 无论是否租出汽车, 公司均需一次性支付月维护费共计 1850 元.

说明: ①汽车数量为整数; ②月利润 = 月租车费 - 月维护费; ③两公司月利润差 = 月利润较高公司的利润 - 月利润较低公司的利润.

在两公司租出的汽车数量相等的条件下, 根据上述信息, 解决下列问题:

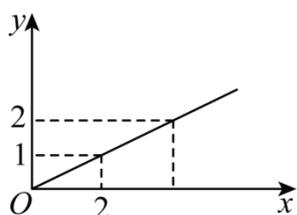
(1) 当每个公司租出的汽车为 10 辆时, 甲公司的月利润是\_\_\_\_\_元; 当每个公司租出的汽车为\_\_\_\_\_辆时, 两公司的月利润相等;

(2) 求两公司月利润差的最大值;

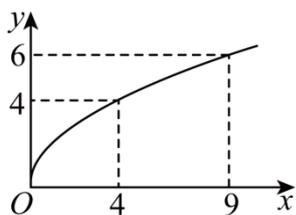
(3) 甲公司热心公益事业, 每租出 1 辆汽车捐出  $a$  元 ( $a > 0$ ) 给慈善机构, 如果捐款后甲公司剩余的月利润仍高于乙公司月利润, 且当两公司租出的汽车均为 17 辆时, 甲公司剩余的月利润与乙公司月利润之差最大, 求  $a$  的取值范围.

11. (23-24 高一上·黑龙江齐齐哈尔·月考) 党的十九大报告明确要求继续深化国有企业改革, 培育具有全球竞争力的世界一流企业. 某企业抓住机遇推进生产改革, 从单一产品转为生产  $A$ 、 $B$  两种产品, 根据市场调查与市场预测,  $A$  产品的利润与投资成正比, 其关系如图①;  $B$  产品的利润与投资的算术平方根成正比, 其关系如图② (注: 所示图中的横坐标表示投资金额,

单位为万元).



图①



图②

- (1)分别求出  $A$ 、 $B$  两种产品的利润表示为投资的函数关系式;
- (2)该企业已筹集到 10 万元资金, 并全部投入  $A$ 、 $B$  两种产品的生产, 问: 怎样分配这 10 万元资金, 才能使企业获得最大利润, 最大利润是多少?

12. (23-24 高一上·湖北武汉·期末) 2023年10月17日, 雅万高铁正式开通运营, 标志着印度尼西亚迈入高铁时代, 中国印度尼西亚共建“一带一路”取得重大标志性成果. 中国高铁正在成为共建“一带一路”和国际产能合作的重要项目. 国内某车辆厂决定从传统型、智能型两种型号的高铁列车车厢中选择一种进行投资生产. 已知投资生产这两种型号车厢的有关数据如下表 (单位: 百万元)

	年固定成本	每节车厢成本	每节车厢价格	每年最多生产的节数
传统型	20	$m$	10	200 节
智能型	40	8	18	120 节

已知  $2 \leq m \leq 8 (m \in \mathbf{R})$ , 每销售  $n$  节智能型车厢时, 需上交  $0.1n^2$  百万元用于当地基础设施建设. 假设生产的车厢当年都能销售完.

- (1) 设  $y_1$ 、 $y_2$  分别为该厂投资传统型和智能型两种型号车厢的年利润, 分别求出  $y_1$ 、 $y_2$  与年产量  $x$  之间的函数关系式;
- (2) ① 分别求出生产两种型号车厢的平均利润的最大值;
- ② 要使生产两种型号车厢的平均利润最大, 该厂应该选择生产哪种型号车厢?

## 第 13 讲 函数的应用

### 模块导航

- 模块一 思维导图串知识
- 模块二 基础知识全梳理（吃透教材）
- 模块三 核心考点举一反三
- 模块四 小试牛刀过关测

### 素养目标

1. 了解函数模型(如一次函数、二次函数、分段函数等在社会生活中普遍使用的函数模型)的广泛应用;
2. 能够利用给定的函数模型或建立确定的函数模型解决实际问题.

### ◇ 模块一 思维导图串知识

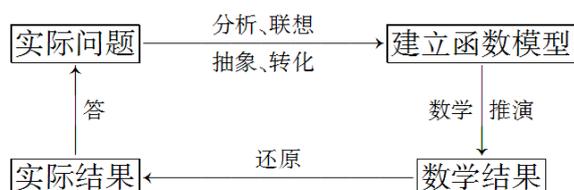


### ◇ 模块二 基础知识全梳理

#### 知识点 1 一次函数模型

- 1、一次函数为:  $y = kx + b (k \neq 0)$
- 2、求最值的方法: 常转化为求解不等式  $ax + b \geq 0$  (或  $\leq 0$ ), 解答时, 注意系数  $a$  的正负, 也可以结合函数图象或其单调性来求最值.
- 3、解决实际应用问题的一般步骤
  - (1) 审题: 弄清题意, 分清条件和结论, 理顺数量关系, 初步选择数学模型;
  - (2) 建模: 将自然语言转化为数学语言, 将文字语言转化为符号语言, 利用数学知识, 建立相应的数学模型;
  - (3) 求模: 求解数学模型, 得出数学结论;
  - (4) 还原: 将数学问题还原为实际问题.

以上过程用框图表示如图:



#### 知识点 2 二次函数模型

- 1、二次函数：形如  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$
- 2、求最值的方法：在根据实际问题建立函数解析式后，可利用配方法、判别式法、换元法、函数的单调性等方法来求函数的最值，从而解决实际问题中的最值问题.二次函数求最值最好结合二次函数的图象来解答.
- 3、解决实际应用问题的注意事项
  - (1) 函数模型应用不当，是常见的解题错误. 所以，要理解题意，选择适当的函数模型.
  - (2) 要特别关注实际问题的自变量的取值范围，合理确定函数的定义域.
  - (3) 注意问题反馈，在解决函数模型后，必须验证这个数学解对实际问题的合理性.

### 知识点 3 三、幂函数模型

- 1、幂函数模型为  $y = ax^n + b (a, b \text{ 为常数}, a \neq 0)$ ,
- 2、在计算幂函数解析式、求幂函数最值的时候，通常利用幂函数的图象、单调性、奇偶性等解题.

### 知识点 4 对勾函数模型

解决“对勾”函数  $f(x) = ax + \frac{b}{x} (a > 0, b > 0)$  的实际应用问题时，需关注该函数的定义域、单调性、值域和图象等，一般通过变形，构造利用基本不等式的条件求最值。

### 知识点 5 应用分段函数时的三个注意点

- 1、分段函数的“段”一定要分得合理，不重不漏；
- 2、分段函数的定义域为对应每一段自变量取值范围的并集；
- 3、分段函数的值域求法为逐段求函数值的范围，最后比较再下结论。

### 知识点 6 图像信息应用题的解答策略

- 1、明确横轴、纵轴的意义，分析题中的具体含义；
- 2、由图象判定函数模型；
- 3、抓住特殊点的实际意义，特殊点一般包括最高点（最大值点）、最低点（最小值点）及折线的拐角点等；
- 4、通过方程、不等式、函数等数学模型化实际问题。

## ◇ 模块三 核心考点举一反三



**考点一：一次函数模型的应用**



例 1. (22-23 高一上·北京·期中) 果蔬批发市场批发某种水果, 不少于 100 千克时, 批发价为每千克 2.5 元, 小王携带现金 3000 元到市场采购这种水果, 并以此批发价买进, 如果购买的水果为  $x$  千克, 小王付款后剩余现金为  $y$  元, 则  $x$  与  $y$  之间的函数关系为 ( )

- A.  $y = 3000 - 100x$  ( $100 < x < 1200$ )
- B.  $y = 3000 - 100x$  ( $100 \leq x \leq 1200$ )
- C.  $y = 3000 - 2.5x$  ( $100 \leq x \leq 1200$ )
- D.  $y = 3000 - 2.5x$  ( $100 < x < 1200$ )

**【答案】** C

**【解析】** 由题意可知函数关系式是  $y = 3000 - 2.5x$ ,

由题意可知最少买 100 千克, 最多买  $\frac{3000}{2.5} = 1200$  千克, 所以函数的定义域是  $[100, 1200]$ .

故  $y = 3000 - 2.5x; x \in [100, 1200]$  故选: C.

**【变式 1-1】** (22-23 高一上·浙江·期中) 某商场在国庆期间举办促销活动, 规定: 顾客购物总金额不超过 400 元, 不享受折扣; 若顾客的购物总金额超过 400 元, 则超过 400 元部分分两档享受折扣优惠, 折扣率如下表所示:

可享受折扣优惠的金额	折扣率
不超过 400 元部分	5%
超过 400 元部分	15%

若某顾客获得 65 元折扣优惠, 则此顾客实际所付金额为 ( )

- A. 935 元
- B. 1000 元
- C. 1035 元
- D. 1100 元

**【答案】** C

**【解析】**当顾客的购物总金额超过 400 元不超过 800 元时，  
 享受折扣优惠的金额最多为  $400 \times 5\% = 20$  元，  
 故该顾客购物总金额一定超过了 800 元，设为  $x$  元 ( $x > 800$ )，  
 则  $400 \times 5\% + (x - 800) \times 15\% = 65$ ，解得  $x = 1100$  (元)，  
 则此顾客实际所付金额为  $1100 - 65 = 1035$  元，故选：C.

**【变式 1-2】**(23-24 高一·全国·单元测试) (多选) 某部影片的盈利额(即影片的票房收入与固定成本之差)记为  $y$ ，观影人数记为  $x$ ， $y$  关于  $x$  的函数图像如图 (1) 所示. 由于目前该片盈利未达到预期，相关人员提出了两种调整方案，图 (2)、图 (3) 中的实线分别为调整后  $y$  关于  $x$  的函数图像. 给出下列四种说法，其中正确的说法是 ( )

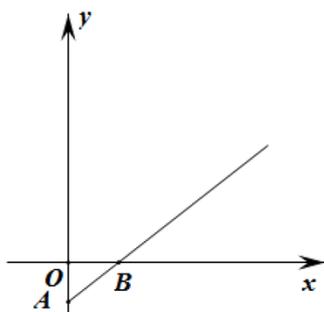


图 (1)

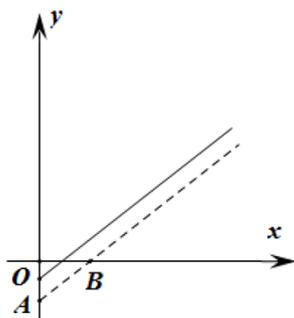


图 (2)

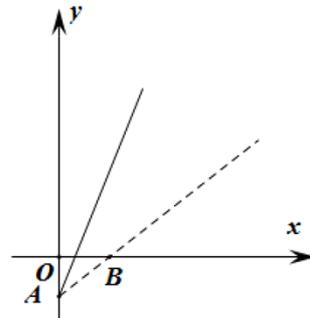


图 (3)

- A. 图 (2) 对应的方案是：提高票价，并提高固定成本
- B. 图 (2) 对应的方案是：保持票价不变，并降低固定成本
- C. 图 (3) 对应的方案是：提高票价，并保持固定成本不变
- D. 图 (3) 对应的方案是：提高票价，并降低固定成本

**【答案】**BC

**【解析】**由图 (1) 可设  $y$  关于  $x$  的函数为  $y = kx + b$ ， $k > 0$ ， $b < 0$ ， $k$  为票价，

当  $k = 0$  时， $y = b$ ，则  $-b$  为固定成本；

由图 (2) 知，直线向上平移， $k$  不变，即票价不变， $b$  变大，

则  $-b$  变小，固定成本减小，故 A 错误，B 正确；

由图 (3) 知，直线与  $y$  轴的交点不变，直线斜率变大，即  $k$  变大，票价提高，

$b$  不变，即  $-b$  不变，固定成本不变，故 C 正确，D 错误；故选：BC.

**【变式 1-3】**(23-24 高一上·云南保山·开学考试) 为落实“绿水青山就是金山银山”的发展理念，某市政部门招标一工程队负责在山脚下修建一座水库的土方施工任务. 该工程队有 A, B

两种型号的挖掘机, 已知 3 台 A 型和 5 台 B 型挖掘机同时施工一小时挖土 165 立方米; 4 台 A 型和 7 台 B 型挖掘机同时施工一小时挖土 225 立方米. 每台 A 型挖掘机一小时的施工费用为 300 元, 每台 B 型挖掘机一小时的施工费用为 180 元.

(1) 分别求每台 A 型, B 型挖掘机一小时挖土多少立方米?

(2) 若不同数量的 A 型和 B 型挖掘机共 12 台同时施工 4 小时, 至少完成 1080 立方米的挖土量, 且总费用不超过 12960 元. 问施工时有哪几种调配方案, 并指出哪种调配方案的施工费用最低, 最低费用是多少元?

**【答案】** (1) 每台 A 型挖掘机一小时挖土 30 立方米, 每台 B 型挖掘机一小时挖土 15 立方米  
(2) A 型挖掘机 7 台, B 型挖掘机 5 台的施工费用最低, 最低费用为 12000 元

**【解析】** (1) 设每台 A 型, B 型挖掘机一小时分别挖土  $x$  立方米和  $y$  立方米, 根据题意, 得

$$\begin{cases} 3x + 5y = 165 \\ 4x + 7y = 225 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 30 \\ y = 15 \end{cases}.$$

所以, 每台 A 型挖掘机一小时挖土 30 立方米,

每台 B 型挖掘机一小时挖土 15 立方米.

(2) 设 A 型挖掘机有  $m$  台, 总费用为  $W$  元, 则 B 型挖掘机有  $(12-m)$  台. 根据题意,

$$W = 4 \times 300m + 4 \times 180(12-m) = 480m + 8640,$$

$$\text{因为 } \begin{cases} 4 \times 30m + 4 \times 15(12-m) \geq 1080 \\ 4 \times 300m + 4 \times 180(12-m) \leq 12960 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq 9 \end{cases},$$

又因为  $m \neq 12-m$ , 解得  $m \neq 6$ , 所以  $7 \leq m \leq 9$ .

所以, 共有三种调配方案.

方案一: 当  $m=7$  时,  $12-m=5$ , 即 A 型挖掘机 7 台, B 型挖掘机 5 台;

方案二: 当  $m=8$  时,  $12-m=4$ , 即 A 型挖掘机 8 台, B 型挖掘机 4 台;

方案三: 当  $m=9$  时,  $12-m=3$ , 即 A 型挖掘机 9 台, B 型挖掘机 3 台.

$\because 480 > 0$ , 由一次函数的性质可知,  $W$  随  $m$  的减小而减小,

$$\text{当 } m=7 \text{ 时, } W_{\text{最小}} = 480 \times 7 + 8640 = 12000$$

此时 A 型挖掘机 7 台, B 型挖掘机 5 台的施工费用最低, 最低费用为 12000 元.

## 考点二: 二次函数模型的应用



例 2. (23-24 高一上·北京东城·期末) 把长为 8cm 的细铁丝截成两段, 各自围成一个正方形, 那么这两个正方形面积之和的最小值是 ( )

A.  $4\text{cm}^2$

B.  $3\text{cm}^2$

C.  $2\sqrt{2}\text{cm}^2$

D.  $2\text{cm}^2$

【答案】D

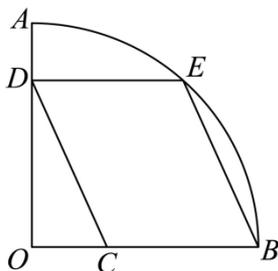
【解析】设铁丝的一段长度为  $x\text{cm}$ ，(其中  $0 < x < 8$ )，则另一段铁丝长为  $(10-x)\text{cm}$ ，

两个正方形的面积之和为  $y\text{cm}^2$ ，

$$\text{根据题意，可得 } y = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{8-x}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}(x-4)^2 + 2,$$

当且仅当  $x=4$  时， $y$  取得最小值，最小值为  $2\text{cm}^2$ . 故选：D.

【变式2-1】(23-24 高一下·广东梅州·期中)如图,在扇形  $OAB$  中,半径  $OA=4$ ,  $\angle AOB=90^\circ$ ,  $C$  在半径  $OB$  上,  $D$  在半径  $OA$  上,  $E$  是扇形弧上的动点 (不包含端点), 则平行四边形  $BCDE$  的周长的取值范围是\_\_\_\_\_.



【答案】(8,12]

【解析】设  $OC=x$ ，则  $BC=4-x$ ，由  $\square BCDE$ ，得  $DE=BC=4-x$ ，显然  $0 < x < 4$ ，

连接  $OE$ ，由  $DE \parallel BC$ ， $\angle AOB=90^\circ$ ，得  $\angle ODE=90^\circ$ ，

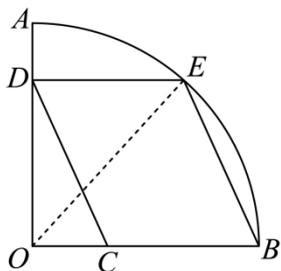
$$OD^2 = OE^2 - DE^2 = 4^2 - (4-x)^2 = 8x - x^2, \quad BE = CD = \sqrt{OD^2 + OC^2} = 2\sqrt{2x}$$

$$\text{因此 } \square BCDE \text{ 的周长 } l = 2BC + 2CD = 8 - 2x + 4\sqrt{2x} = -(\sqrt{2x} - 2)^2 + 12$$

显然  $0 < \sqrt{2x} < 2\sqrt{2}$ ，当  $\sqrt{2x}=2$ ，即  $x=2$  时， $l_{\max}=12$ ，而  $x=0$  时， $l=8$ ，

所以  $\square BCDE$  的周长的取值范围是  $(8,12]$ 。

故答案为：(8,12]



【变式2-2】(23-24 高一上·湖南衡阳·月考)某工厂2022年年初用100万元购进一台新的设备,并立即投入使用,该设备使用后,每年的总收入预计为50万元.设使用  $x$  年后该设备的

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/998004053051007001>