上海实验学校高二期中考试数学试卷

2023.04

一.填空题（每题 4 分，共 40 分）

1. 过点 $P(2,3)$，且一个法向量为 $\vec{n}=(3,-1)$ 的直线的点法向式方程是________.

【答案】$3(x-2)-(y-3)=0$

【解析】

【分析】根据直线的方向向量与其法向量垂直列式可得.

【详解】在所求直线上任取一点 (x,y),则所求直线的方向向量为 $(x-2,y-3)$,

再根据直线的方向向量与法向量垂直可得,

$(3,-1)\cdot(x-2,y-3)=0$,

即 $3(x-2)-(y-3)=0$.

故答案为: $3(x-2)-(y-3)=0$.

【点睛】本题考查了直线的方向向量与法向量以及直线的点法向式方程,属于基础题.

2. 若 $x^2+y^2-2x-4y=0$，求圆心坐标为___________.

【答案】$(1,2)$

【解析】

【分析】将圆的一般方程化为标准方程，即可得出答案.

【详解】解：由 $x^2+y^2-2x-4y=0$，可得圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$，

所以圆心坐标为 $(1,2)$.

故答案为：$(1,2)$.

3. 椭圆 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦距是______.

【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】

根据椭圆中 a， b， c 的数量关系求解.

【详解】解：椭圆$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1$的焦距是$2c=2\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$.

故答案为：$2\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了椭圆中a，b，c的数量关系，属于基础题.

4. 双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$的两条渐近线夹角为________.

【答案】$\dfrac{\pi}{3}$

【解析】

【分析】首先求出双曲线的渐近线方程，求出渐近线的斜率，由夹角公式$\tan\alpha=\dfrac{|k_1-k_2|}{|1+k_1k_2|}$即可求出渐近线的夹角.

【详解】因为双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，所以渐近线方程为$y=\sqrt{3}x$或$y=-\sqrt{3}x$，

设两条渐近线的夹角为锐角α，

则$\tan\alpha=\dfrac{|\sqrt{3}-(-\sqrt{3})|}{|1+\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})|}=\sqrt{3}$，所以夹角为$\dfrac{\pi}{3}$.

故答案为$\dfrac{\pi}{3}$

【点睛】本题考查双曲线渐近线方程的求法以及夹角公式，属于基础题.

5. 已知直线$l:ax+(2a-1)y+a-3=0$，当a变化时，直线l总是经过定点，则定点坐标为______.

【答案】$(5,-3)$

【解析】

【分析】把直线方程化为$a(x+2y+1)-y-3=0$，令$\begin{cases}x+2y+1=0\\-y-3=0\end{cases}$，求出$x$，$y$的值即可.

【详解】因为直线$l:ax+(2a-1)y+a-3=0$可化为$a(x+2y+1)-y-3=0$，

令$\begin{cases}x+2y+1=0\\-y-3=0\end{cases}$，解得$x=5,y=-3$，

所以直线l过定点$(5,-3)$，

故答案为：$(5,-3)$.

6. 若原点到直线l：$ax+y+8=0$的距离为4，则a的值是______.

【答案】$\pm\sqrt{3}$；

【解析】

【分析】

由点到直线的距离公式得$\dfrac{|8|}{\sqrt{a^2+1^2}}=4$，再求解即可.

【详解】解：由点到直线的距离公式可得：$d=\dfrac{|8|}{\sqrt{a^2+1^2}}=4$，解得$a=\pm\sqrt{3}$，

故答案为：$\pm\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了点到直线的距离公式，属基础题.

7. 已知直线l过点$(-1,0)$且与直线$2x-y=0$垂直，则圆$x^2+y^2-4x+8y=0$与直线l相交所得的弦长为

__

【答案】$2\sqrt{15}$

【解析】

【分析】

先求出直线l的方程，再求出圆心C与半径r，计算圆心到直线l的距离d，由垂径定理求弦长$|AB|$.

【详解】解：由题意可得，l的方程为$x+2y+1=0$，

Q $x^2+y^2-4x+8y=0$可化为$(x-2)^2+(y+4)^2=20$，圆心$(2,-4)$，半径$r=2\sqrt{5}$，

$\therefore$圆心$(2,-4)$到l的距离$d=\dfrac{|2-8+1|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，

$\therefore AB=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{20-5}=2\sqrt{15}$.

故答案为：$2\sqrt{15}$.

【点睛】本题考查直线与圆的方程的应用问题，考查两条直线垂直以及直线与圆相交所得弦长的计算问题，属于基础题.

8. 设F_1,F_2是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$的两个焦点，P在椭圆上，且满足$\angle F_1PF_2=60^\circ$，则ΔPF_1F_2的面积是__________.

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【详解】由题意，得$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=4\\|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|cos60^0=\left(2\sqrt{3}\right)^2\end{cases}$，

即$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=4\\|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|=12\end{cases}$，则$3|PF_1|\cdot|PF_2|=4^2-12$，

即$|PF_1|\cdot|PF_2|=\dfrac{4}{3}$，所以$\Delta PF_1F_2$的面积为$S=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

点睛：本题考查椭圆的定义和余弦定理的应用；在处理椭圆或双曲线中涉及两个焦点问题时，往往利用椭圆或双曲线的定义（定和或定差）进行处理，往往再结合正弦定理、余弦定理进行求解.

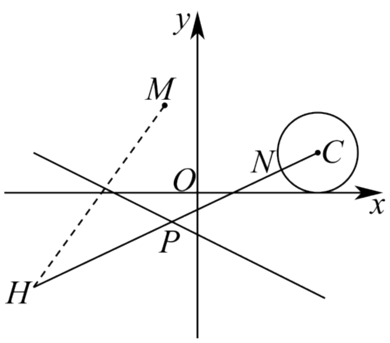
9. 已知$M\left(-1,2\right)$，N是曲线$C:x^2+y^2-6x-2y+9=0$上的动点，P为直线$x+2y+2=0$上的一个动点，则$|PM|+|PN|$的最小值为______.

【答案】$3\sqrt{5}-1$

【解析】

【分析】根据题意，求得M关于直线$x+2y+2=0$的对称点H，结合图像即可得到当P,H,C三点共线时，$|PM|+|PN|$取得最小值.

【详解】



如图，曲线$C:x^2+y^2-6x-2y+9=0$是以$C\left(3,1\right)$为圆心，以1为半径的圆，

则根据圆的性质可知，$|PN|$的最小值为$|PC|-1$，

设M关于直线$x+2y+2=0$的对称点为$H\left(m,n\right)$，

则可得$\begin{cases}\dfrac{n-2}{m+1}=2\\ \dfrac{m-1}{2}+2\times\dfrac{n+2}{2}+2=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=-3\\ n=-2\end{cases}$，即$H(-3,-2)$，

连接HC，分别交直线$x+2y+2=0$与圆C于P,N，

则$|PM|+|PN|\geq|PM|+|PC|-1=|PH|+|PC|-1\geq|HC|-1$，

当且仅当P,H,C三点共线时取等号，此时取得最小值$3\sqrt{5}-1$，

所以$|PM|+|PN|$的最小值为$3\sqrt{5}-1$.

故答案为: $3\sqrt{5}-1$

10. 已知F_1、F_2是椭圆和双曲线的公共焦点，P是他们的一个公共点，且$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$，则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为___.

【答案】$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】设|PF$_1$|=r$_1$，|PF$_2$|=r$_2$，|F$_1$F$_2$|=2c，椭圆和双曲线的离心率分别为e$_1$，e$_2$, 由余弦定理可得

4c^2=（r$_1$）^{2}+（r$_2$）^{2}− 2r$_1$r$_2$cos$\dfrac{\pi}{3}$，①在椭圆中，①化简为即4c^2=4a^2− 3r$_1$r$_2$…②，在双曲线中，化简为即4c^2=4a$_1$^{2}+r$_1$r$_2$…③，所以$\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{3}{e_2^2}=4$，再利用柯西不等式求椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值.

【详解】设椭圆的长半轴为a，双曲线的实半轴为a$_1$，（a＞a$_1$），半焦距为c，

由椭圆和双曲线的定义可知，

设|PF$_1$|=r$_1$，|PF$_2$|=r$_2$，|F$_1$F$_2$|=2c,

椭圆和双曲线的离心率分别为e$_1$，e$_2$,

∵∠F$_1$PF$_2$=$\dfrac{\pi}{3}$，则∴由余弦定理可得4c^2=（r$_1$）^{2}+（r$_2$）^{2}− 2r$_1$r$_2$cos$\dfrac{\pi}{3}$，①

在椭圆中，①化简为即4c^2=4a^2− 3r$_1$r$_2$…②,

在双曲线中，①化简为即4c^2=4a$_1$^{2}+r$_1$r$_2$…③,

所以$\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{3}{e_2^2}=4$，

由柯西不等式得（$1+\frac{1}{3}$）（$\frac{1}{e_1^{\ 2}}+\frac{3}{e_2^{\ 2}}$）≥（$\frac{1}{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{e_2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$）^{2}

所以$\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\le\frac{4\sqrt{3}}{3}$

故答案为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【点睛】本题主要考查椭圆和双曲线的定义和性质，利用余弦定理和柯西不等式是解决本题的关键．属于难题.

二.选择题（每题 4 分，共 16 分）

11. “$a=1$”是“直线$x+ay-1=0$与直线$ax-y+1=0$相互垂直”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】直线$x+ay-1=0$与直线$ax-y+1=0$相互垂直得到$a\in R$，再利用充分必要条件的定义判断得解.

【详解】因为直线$x+ay-1=0$与直线$ax-y+1=0$相互垂直，

所以$1\times(a)+a\times(-1)=0$，

所以$a\in R$.

所以$a=1$时，直线$x+ay-1=0$与直线$ax-y+1=0$相互垂直，所以“$a=1$”是“直线$x+ay-1=0$与直线$ax-y+1=0$相互垂直”的充分条件；

当直线$x+ay-1=0$与直线$ax-y+1=0$相互垂直时，$a=1$不一定成立，所以“$a=1$”是“直线$x+ay-1=0$与直线$ax-y+1=0$相互垂直”的非必要条件.

所以“$a=1$”是“直线$x+ay-1=0$与直线$ax-y+1=0$相互垂直”的充分非必要条件.

故选：A

【点睛】方法点睛：充分必要条件的判定，常用的方法有：（1）定义法；（2）集合法；（3）转化法. 要根据已知条件灵活选择方法求解.

12. 已知两点 $A(2,-1)$，$B(-5,-3)$，直线 l 过点 $(1,1)$，若直线 l 与线段 AB 相交，则直线 l 的斜率取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-2]\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$　　B. $\left[-2,\frac{2}{3}\right]$

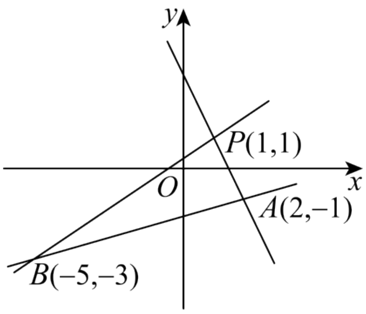
C. $\left[-\frac{2}{3},2\right]$　　D. $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup[2,+\infty)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据直线过定点 $P\ (1,1)$，画出图形，再求出 PA，PB 的斜率，然后利用数形结合求解.

【详解】如图所示：



若直线 l 与线段 AB 相交，

则 $k\le k_{PA}$ 或 $k\ge k_{PB}$，

因为 $k_{PA}=\frac{-1-1}{2-1}=-2$，$k_{PB}=\frac{-3-1}{-5-1}=\frac{2}{3}$，

所以直线 l 的斜率取值范围是 $(-\infty,-2]\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$.

故选：A.

【点睛】本题主要考查直线斜率的应用，还考查了数形结合的思想方法，属于基础题.

13. 已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F_2，左顶点为 A_1，若 E 上的点 P 满足 $PF_2\perp x$ 轴，$\sin\angle PA_1F_2=\frac{3}{5}$，则 E 的离心率为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】由题意构建方程，进而转化为a,c的齐次式，从而得到结果.

【详解】$\because$ $\sin\angle PA_1F_2=\frac{3}{5}$，

$\therefore \tan\angle PA_1F_2=\frac{3}{4}$

$\therefore$ $\tan\angle PA_1F_2=\frac{\frac{b^2}{a}}{a+c}=\frac{3}{4}$，即$4e^2+3e-1=0$

$\therefore e=\frac{1}{4}$.

故选：C

14. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，上顶点为A，延长$AF_2$ 交椭圆C于点B，若$\triangle ABF_1$为等腰三角形，则椭圆的离心率$e=$（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】由$\triangle ABF_1$为等腰三角形，可知$|BF_1|=|BA|$，可求出$|AF_2|=a$，设$|F_1B|=x$，结合椭圆的定义可求得$x=\frac{3}{2}a$，过点B作x轴的垂线，交x轴于C点，易知$\triangle AOF_2\backsim\triangle BCF_2$，可求出点$B$的坐标，将点$B$的坐标代入椭圆方程，进而可求出离心率.

【详解】在直角三角形AOF_2中，$|AF_2|=\sqrt{b^2+c^2}=a$，且$|AF_1|=a$，

易知$|BF_1|>a$，$|BA|>a$，故等腰$\triangle ABF_1$中，$|BF_1|=|BA|$.

设$|BF_1|=x$，则$|BF_2|=|BA|-|AF_2|=x-a$，

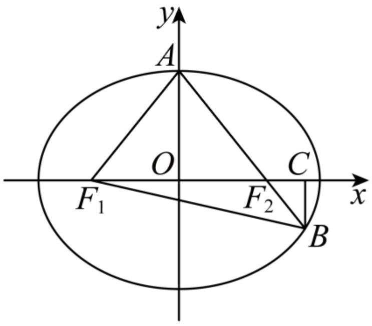
由椭圆的定义知$|F_1B|+|F_2B|=2a$，则$x+x-a=2a$，解得$x=\frac{3}{2}a$，所以$|BF_2|=\frac{1}{2}a$，

过点B作x轴的垂线，交x轴于C点，易知$\triangle AOF_2\backsim\triangle BCF_2$，

所以$|BC|=\frac{1}{2}b,|F_2C|=\frac{1}{2}c$，故点$B$的坐标为$\left(\frac{3c}{2},-\frac{b}{2}\right)$，

将点B的坐标代入椭圆方程得$\frac{9c^2}{4a^2}+\frac{b^2}{4b^2}=1$，解得$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，故$e=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：B.



【点睛】本题考查椭圆的性质，考查离心率的求法，考查学生的计算求解能力，属于中档题.

三.解答题（本大题满分 44 分，本大题共有 4 题，解答下列各题必须写出必要的步骤）

15. 设直线的方程为$(a+1)x+y+2-a=0, a\in R$.

（1）若在两坐标轴上的截距相等，求直线的方程；

（2）若与两坐标轴围成的三角形的面积为 1，求 a 的值.

【答案】（1）$3x+y=0$ 或 $x+y+2=0$（2）$a=3\pm\sqrt{7}$

【解析】

【分析】（1）讨论截距是否为 0：当截距为 0 时，过原点，代入可得a，进而得直线方程；当截距不为 0 时，使得截距相等，求得a，进而得直线方程；

（2）先求得直线在x轴，y轴上的截距，结合面积为 1，即可解方程求得 a 的值.

【详解】（1）由题意知，

当直线过原点时，该直线在两条坐标轴上的截距都为 0，

此时$a=2$，直线的方程为$3x+y=0$；

当直线不过原点时，由截距相等，得$a-2=\dfrac{a-2}{a+1}$，则$a=0$，

直线的方程为$x+y+2=0$，

综上所述，所求直线的方程为$3x+y=0$或$x+y+2=0$.

（2）由题意知，直线在x轴，y轴上的截距分别为$\dfrac{a-2}{a+1}$、$a-2$，

$$\frac{1}{2}\left|\frac{a-2}{a+1}\times(a-2)\right|=1,$$

解得$a=3\pm\sqrt{7}$.

【点睛】本题考查了直线方程截距的概念，直线方程的求法，由直线围成图形面积的应用，属于基础题.

16. 如图，在宽为 14 的路边安装路灯，灯柱 OA 高为 8，灯杆 PA 是半径为 r 的圆 C