江苏省南京市示范名校 2024 年高三下学期第三次联考数学试题

注意事项：

1． 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2．选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0．5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3．请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．要得到函数 $y \quad \sqrt{3}\sin x \quad \frac{\ }{12}$ 的图象，只需将函数 $y \quad \sqrt{3}\sin 2x \quad \frac{\ }{3}$ 图象上所有点的横坐标（　　）

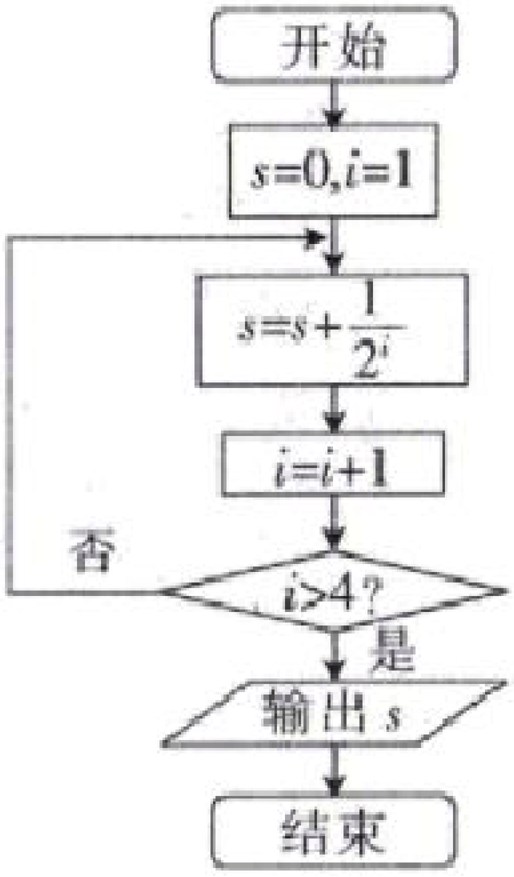
A．伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再将得到的图象向右平移 $\frac{\ }{4}$ 个单位长度

B．伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再将得到的图像向左平移 $\frac{\ }{4}$ 个单位长度

C．缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再将得到的图象向左平移 $\frac{5}{24}$ 个单位长度

D．缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再将得到的图象向右平移 $\frac{11}{24}$ 个单位长度

2．执行如图所示的程序框图，输出的结果为（　　）



A．$\frac{7}{8}$　　B．$\frac{15}{8}$　　C．$\frac{31}{16}$　　D．$\frac{15}{16}$

3．已知函数 $f(x) \quad \begin{cases} \ln(2 \quad x), x\leqslant 1, \\ x^2 \quad 1, x \quad 1, \end{cases}$ 若 $|f(x)| \quad ax \quad a\geqslant 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A． $\frac{1}{2},1$　　　B．$[0,1]$　　　C．$[1,\quad)$　　　D．$[0,2]$

4．已知 m,n 表示两条不同的直线，　，　表示两个不同的平面，且 m　　，n　　，则“　　”是“$m\,/\!/\,n$”的(　　)条件.

A．充分不必要　　　B．必要不充分　　　C．充要　　　D．既不充分也不必要

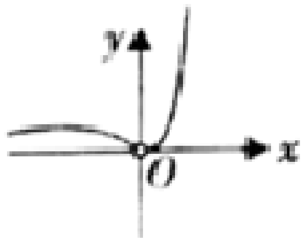
5．设实数 x,y 满足条件 $\begin{cases} x+y-2\leqslant 0 \\ 2x-y+3\geqslant 0 \\ x-y\leqslant 0 \end{cases}$ 则 $x+y+1$ 的最大值为（　　）

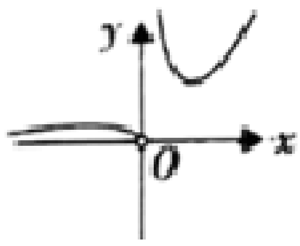
A．1　　　B．2　　　C．3　　　D．4

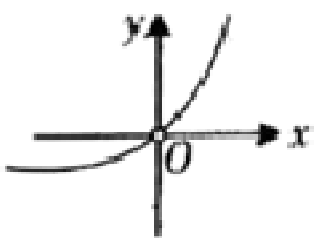
6．若复数 $z\quad\frac{a\quad i}{1\quad i}$ 在复平面内对应的点在第二象限，则实数 a 的取值范围是（　　）

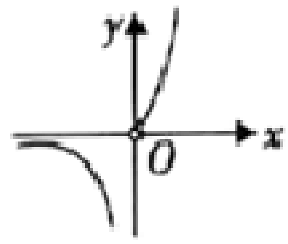
A．$1,1$　　　B．$\quad,1$　　　C．$1,$　　　D．$0,$

7．函数 $f\ x\quad\frac{x^2e^x}{|x|}$ 的图像大致为（　　）

A．

B．

C．

D．

8．设集合 $A\quad x|\ 2\quad x\quad a$，$B\quad 0,2,4$，若集合 $A\cap B$ 中有且仅有 2 个元素，则实数 a 的取值范围为

A．$0,2$　　　B．$2,4$

C．$4,$　　　D．$\quad,0$

9．已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}\quad\frac{y^2}{b^2}\quad 1\ a\quad b\quad 0$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过点 F_1 的直线与椭圆交于 P、Q 两点.若 PF_2Q 的内切圆与线段 PF_2 在其中点处相切，与 PQ 相切于点 F_1，则椭圆的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

10．已知函数 $f(x)\quad\begin{cases} 2^{x\ 1}\quad 2,x\quad 0, \\ |\log_2 x|,x\quad 0, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)^2\quad 2af(x)\quad 3a\quad 0$ 有六个不相等的实数根，则实数 a 的取值范围为（　　）

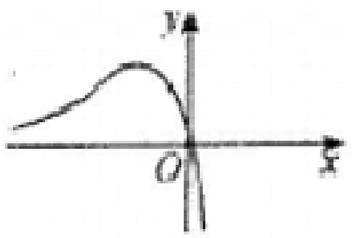
A． $3,\frac{16}{5}$　　　　B． $3,\frac{16}{5}$　　　　C．$(3,4)$　　　　D． $3,4$

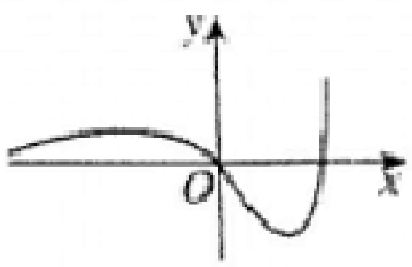
11．设 $f'\ x$ 函数 $f\ \ x\ \ \ x\ \ \ 0$ 的导函数，且满足 $f'\ x\ \ \ \frac{2f\ \ x}{x}$，若在 ABC 中， $A\ \ \ \frac{3}{4}$，则（　　）

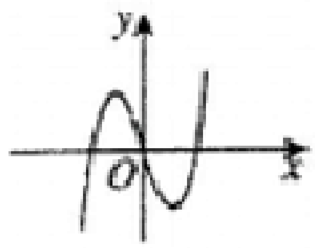
A． $f\ \sin A\ \sin^2 B\ \ \ f\ \sin B\ \sin^2 A$　　B． $f\ \sin C\ \sin^2 B\ \ \ f\ \sin B\ \sin^2 C$

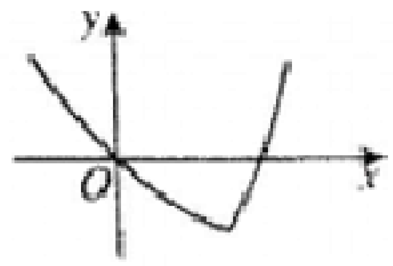
C． $f\ \cos A\ \sin^2 B\ \ \ f\ \sin B\ \cos^2 A$　　D． $f\ \cos C\ \sin^2 B\ \ \ f\ \sin B\ \cos^2 C$

12．当 $a\ \ \ 0$ 时，函数 $f\ \ x\ \ \ \ x^2\ \ \ ax\ \ e^x$ 的图象大致是（　　）

A． 

B． 

C． 

D． 

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知函数 $f\ \ x\ \ \ \begin{cases} 2\ \ |x|, & x\ \ 2, \\ x\ \ 2^2, & x\ \ 2, \end{cases}$ 函数 $g\ \ x\ \ \ \ b\ \ \ f\ \ 2\ \ \ x$ ，其中 $b\ \ R$，若函数 $y\ \ \ f\ \ x\ \ \ \ g\ \ x$ 恰有 4 个零点，则 b 的取值范围是_________.

14．某种圆柱形的如罐的容积为 128 个立方单位，当它的底面半径和高的比值为______.时，可使得所用材料最省.

15.已知点 P 是抛物线 $x^2\ \ \ 4y$ 上动点，F 是抛物线的焦点，点 A 的坐标为 $0,\ 1$ ，则 $\frac{PF}{PA}$ 的最小值为______________.

16．（5 分）已知曲线 C 的方程为 $y\ \ \ \ ax^3\ \ \ x(a\ \ \ R)$，其图象经过点 $P(1,0)$，则曲线 C 在点 P 处的切线方程是____________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x\ \ \cos \\ y\ \ 2\sin \end{cases}$ （　为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴且取相同的单位长度建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\cos\ \ \ \ \sin\ \ \ 3\ \ \ 0$.

（1）求直线 l 的直角坐标方程；

（2）求曲线 C 上的点到直线 l 距离的最小值和最大值.

18．（12 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x\ \ \ 1\ \ 2\cos \\ y\ \ 2\sin \end{cases}$ （　为参数）.以坐标原点为极点，x 轴正

半轴为极轴，建立极坐标系.已知点 P 的直角坐标为 $2,0$ ，过 P 的直线 l 与曲线 C 相交于 M ， N 两点.

（1）若 l 的斜率为 2，求 l 的极坐标方程和曲线 C 的普通方程；

（2）求 $\overline{PM}\ \ \overline{PN}$ 的值.

19.（12 分）已知函数 $f\ x\quad x\ln x\ \frac{a}{2}x^2\quad x, a\quad R, e\quad 2.71828$ 是自然对数的底数

（1）若 $a\quad e$，讨论 $f\ x$ 的单调性；

（2）若 $f\ x$ 有两个极值点 x_1, x_2，求 a 的取值范围，并证明: $x_1 x_2\quad x_1\quad x_2$.

20.（12 分）已知函数 $f\ x\quad ax\quad a\ \ 1\ \ln x\ \ \frac{1}{x}\ \ 2\ \ a\quad R$.

（1）讨论函数 $f\ x$ 单调性；

（2）当 $a\quad 2$ 时，求证： $f\ x\quad e^x\quad 2x\ \ \frac{1}{x}$.

21.（12 分）已知等差数列 a_n 的公差 $d\quad 2$，且 a_1， a_2， a_4 成等比数列.

（1）求数列 a_n 的通项公式；

（2）设 $b_n\quad \frac{1}{2}^{a_n}$，求数列 $a_n\quad b_n$ 的前 n 项和 S_n.

22.（10 分）已知在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{2\sqrt{3}\sin A}{3\sin C}$.

（1）求 b 的值；

（2）若 $\cos B+\sqrt{3}\sin B=2$,求 $a+c$ 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解题分析】

分析：根据三角函数的图象关系进行判断即可.

详解：将函数 $y\quad \sqrt{3}\sin\ 2x\quad \overline{3}$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），

得到 $y\quad \sqrt{3}\sin(\frac{1}{2}\quad 2x\quad \frac{}{3})\quad \sqrt{3}\sin(x\quad \frac{}{3})$，

再将得到的图象向左平移 $\frac{}{4}$ 个单位长度得到 $y\quad \sqrt{3}\sin(x\quad \frac{}{3}\quad \frac{}{4})\quad \sqrt{3}\sin(x\quad \frac{}{12})$，

故选 B．

点睛：本题主要考查三角函数的图象变换，结合　和　的关系是解决本题的关键．

2、D

【解题分析】

由程序框图确定程序功能后可得出结论．

【题目详解】

执行该程序可得 $S\quad 0\quad \frac{1}{2^1}\quad \frac{1}{2^2}\quad \frac{1}{2^3}\quad \frac{1}{2^4}\quad \frac{15}{16}$．

故选：D．

【题目点拨】

本题考查程序框图．解题可模拟程序运行，观察变量值的变化，然后可得结论，也可以由程序框图确定程序功能，然后求解．

3、D

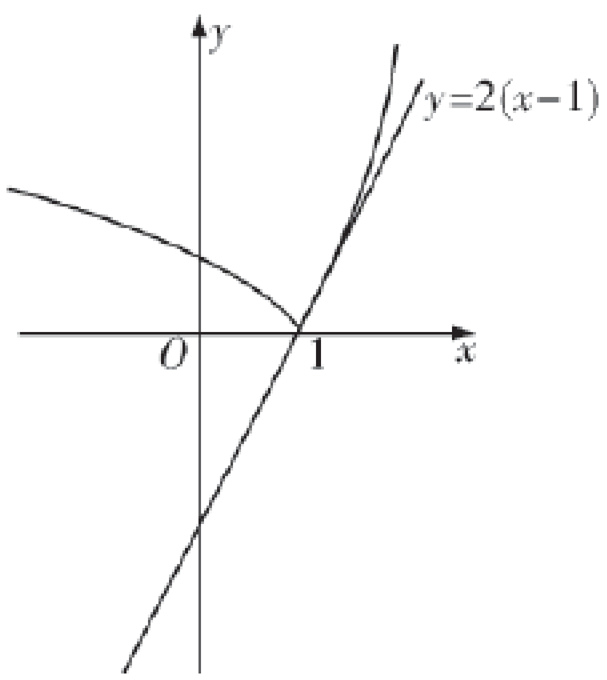
【解题分析】

由 $|f(x)|\quad ax\quad a\geqslant 0$ 恒成立，等价于 $y\quad |f(x)|$ 的图像在 $y\quad a(x\quad 1)$ 的图像的上方，然后作出两个函数的图像，利用数形结合的方法求解答案．

【题目详解】

因为 $|f(x)|\quad \begin{matrix} \ln(2\quad x), x\leqslant 1, \\ x^2\quad 1, x\quad 1, \end{matrix}$ 由 $|f(x)|\geqslant a(x\quad 1)$ 恒成立，分别作出 $y\quad |f(x)|$ 及 $y\quad a(x\quad 1)$ 的图象，由图知，当 $a\quad 0$ 时，不符合题意，只须考虑 $a\geqslant 0$ 的情形，当 $y\quad a(x\quad 1)$ 与 $y\quad |f(x)|\ (x\geqslant 1)$ 图象相切于 $(1,0)$ 时，由导数几何意义，此时 $a\quad (x^2\quad 1)\Big|_{x\quad 1}\quad 2$，故 $0\leqslant a\leqslant 2$．

故选：D



【题目点拨】

此题考查的是函数中恒成立问题，利用了数形结合的思想，属于难题.

4、B

【解题分析】

根据充分必要条件的概念进行判断.

【题目详解】

对于充分性：若　　　，则m，n可以平行，相交，异面，故充分性不成立；

若$m // n$，则n　　，n　　，可得　　　，必要性成立.

故选：B

【题目点拨】

本题主要考查空间中线线，线面，面面的位置关系，以及充要条件的判断，考查学生综合运用知识的能力.解决充要条件判断问题，关键是要弄清楚谁是条件，谁是结论.

5、C

【解题分析】

画出可行域和目标函数，根据目标函数的几何意义平移得到答案.

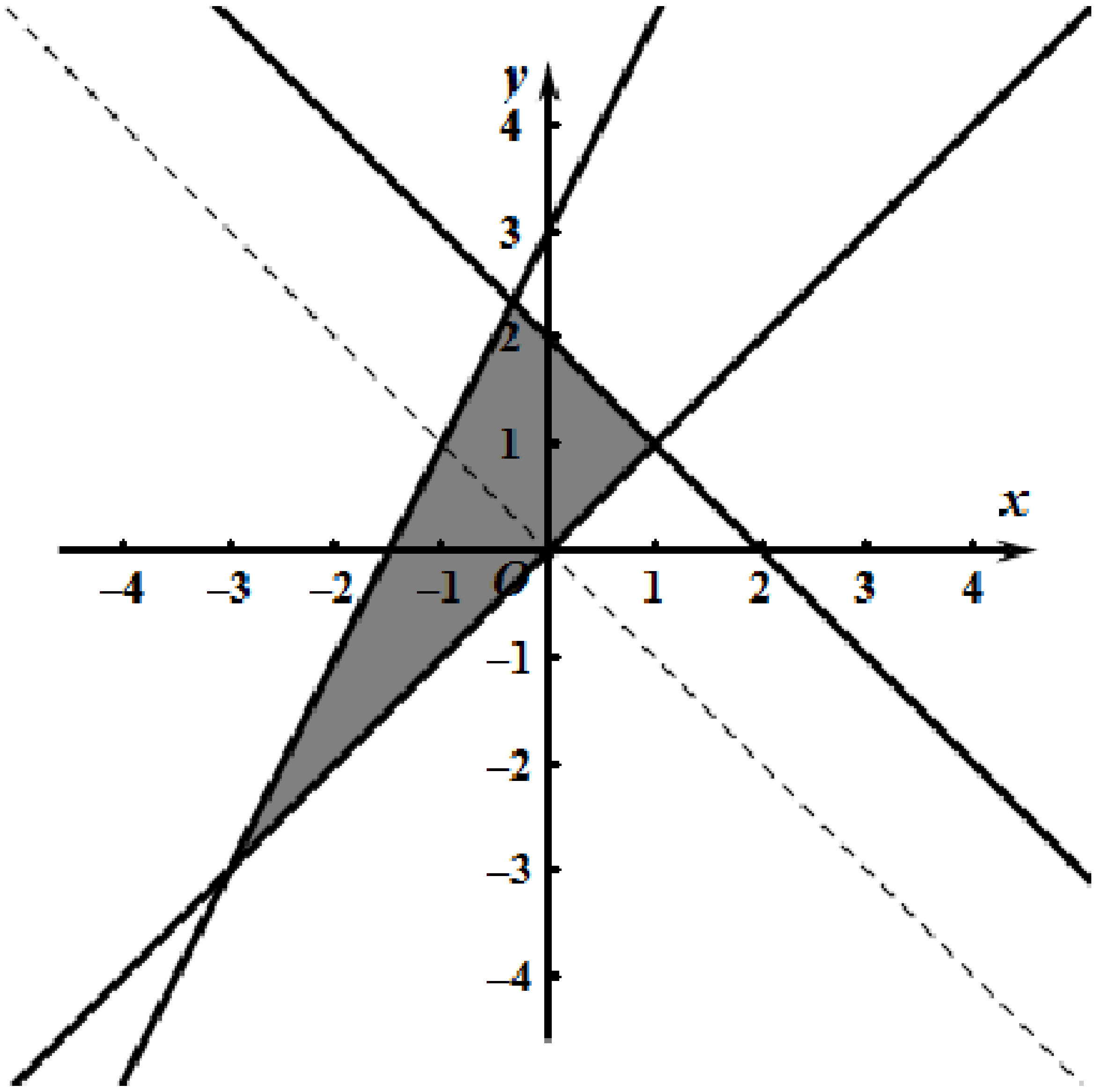
【题目详解】

如图所示：画出可行域和目标函数，

$z = x + y + 1$，即$y = -x + z - 1$，z表示直线在y轴的截距加上 1，

根据图像知，当$x + y = 2$时，且$x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$时，$z = x + y + 1$有最大值为$3$.

故选：C.



【题目点拨】

本题考查了线性规划问题，画出图像是解题的关键.

6、B

【解题分析】

复数 $z\ \ \frac{a\ \ i}{1\ \ i}\ \ \frac{a\ \ 1}{2}\ \ \frac{a\ \ 1}{2}i$，在复平面内对应的点在第二象限，可得关于 a 的不等式组，解得 a 的范围.

【题目详解】

$z\ \ \frac{a\ \ i}{1\ \ i}\ \ \frac{a\ \ 1}{2}\ \ \frac{a\ \ 1}{2}i$，

由其在复平面对应的点在第二象限，

得 $\begin{matrix} a\ \ 1\ \ 0 \\ a\ \ 1\ \ 0 \end{matrix}$，则 $a\ \ \ 1$.

故选：B.

【题目点拨】

本题考查了复数的运算法则、几何意义、不等式的解法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

7、A

【解题分析】

根据 $f(x)\ \ \ 0$ 排除 C ，D ，利用极限思想进行排除即可.

【题目详解】

解：函数的定义域为 $\{x|x\ \ 0\}$，$f(x)\ \ 0$ 恒成立，排除 C，D，

当 $x\ \ 0$ 时，$f(x)\ \ \frac{x^2e^x}{|x|}\ \ xe^x$，当 $x\ \ 0$，$f(x)\ \ 0$，排除 B，

故选：A.

【题目点拨】

本题主要考查函数图象的识别和判断，利用函数值的符号以及极限思想是解决本题的关键，属于基础题.

8、B

【解题分析】

由题意知 $0,2\ \ A$ 且 $4\ \ A$，结合数轴即可求得 a 的取值范围.

【题目详解】

由题意知，$A\cap B=\ 0,2$，则 $0,2\ \ A$，故 $a\ \ 2$，

又 $4\ \ A$，则 $a\ \ 4$，所以 $2\ \ a\ \ 4$，

所以本题答案为 B.

【题目点拨】

本题主要考查了集合的关系及运算，以及借助数轴解决有关问题，其中确定 $A\cap B$ 中的元素是解题的关键，属于基础题.

9、D

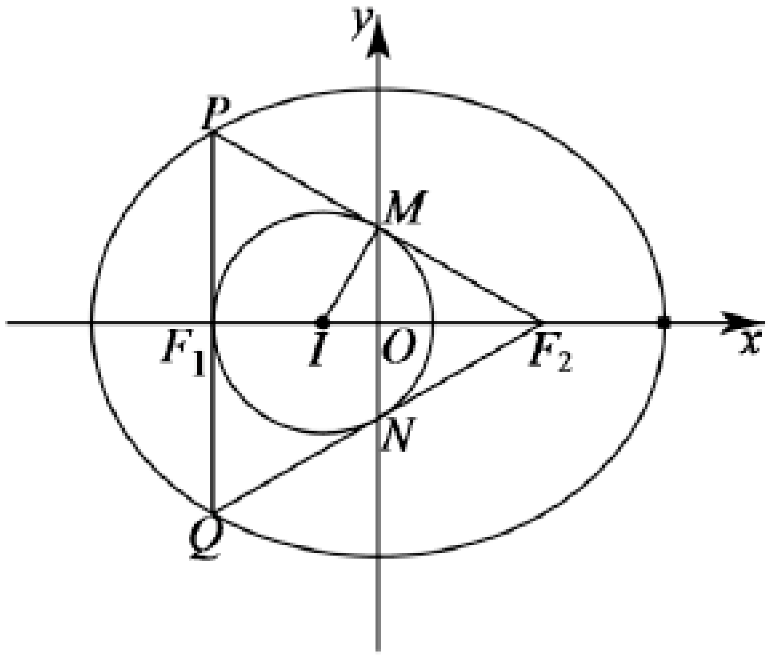
【解题分析】

可设 PF_2Q 的内切圆的圆心为 I，设 $|PF_1|\ \ m$，$|PF_2|\ \ n$，可得 $m\ \ n\ \ 2a$，由切线的性质：切线长相等推得 $m\ \ \frac{1}{2}n$，解得 m、n，并设 $|QF_1|\ \ t$，求得 t 的值，推得 PF_2Q 为等边三角形，由焦距为三角形的高，结合离心率公式可得所求值.

【题目详解】

可设 PF_2Q 的内切圆的圆心为 I，M 为切点，且为 PF_2 中点，$|PF_1|\ \ |PM|\ \ |MF_2|$，

设 $|PF_1|\ \ m$，$|PF_2|\ \ n$，则 $m\ \ \frac{1}{2}n$，且有 $m\ \ n\ \ 2a$，解得 $m\ \ \frac{2a}{3}$，$n\ \ \frac{4a}{3}$，



设$|QF_1| \quad t$，$|QF_2| \quad 2a \quad t$，设圆 I 切QF_2于点 N ，则$|NF_2| \quad |MF_2| \quad \frac{2a}{3}$，$|QN| \quad |QF_1| \quad t$，

由$2a \quad t \quad |QF_2| \quad |QN| \quad |NF_2| \quad t \quad \frac{2a}{3}$，解得$t \quad \frac{2a}{3}$，$|PQ| \quad m \quad t \quad \frac{4a}{3}$，

$\because |PF_2| \quad |QF_2| \quad \frac{4a}{3}$，所以 PF_2Q 为等边三角形，

所以，$2c \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{4a}{3}$，解得$\frac{c}{a} \quad \frac{\sqrt{3}}{3}$.

因此，该椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：D.

【题目点拨】

本题考查椭圆的定义和性质，注意运用三角形的内心性质和等边三角形的性质，切线的性质，考查化简运算能力，属于中档题.

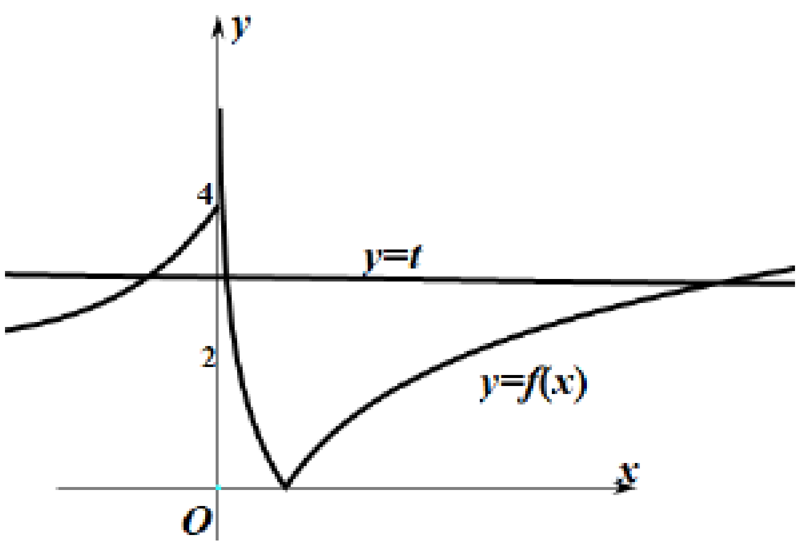
10、B

【解题分析】

令 $f(x) \quad t$，则$t^2 \quad 2at \quad 3a \quad 0$，由图象分析可知$t^2 \quad 2at \quad 3a \quad 0$在$(2, 4]$上有两个不同的根，再利用一元二次方程根的分布即可解决.

【题目详解】

令 $f(x) \quad t$，则$t^2 \quad 2at \quad 3a \quad 0$，如图



$y\quad t$与$y\quad f(x)$顶多只有 3 个不同交点，要使关于x的方程 $f(x)^2\quad 2af(x)\quad 3a\quad 0$有

六个不相等的实数根，则$t^2\quad 2at\quad 3a\quad 0$有两个不同的根$t_1,t_2\quad (2,4]$，

设$g(t)\quad t^2\quad 2at\quad 3a$由根的分布可知，

$$\begin{matrix} 4a^2\quad 12a\quad 0 \\ a\quad (2,4) \\ g(2)\quad 0 \\ g(4)\quad 0 \end{matrix}$$，解得$3\quad a\quad \frac{16}{5}$.

故选：B.

【题目点拨】

本题考查复合方程根的个数问题，涉及到一元二次方程根的分布，考查学生转化与化归和数形结合的思想，是一道中档题.

11、D

【解题分析】

根据 $f'\ x\quad \frac{2f\ x}{x}$的结构形式，设$g\ x\quad \frac{f\ x}{x^2}$，求导$g\quad x\quad \frac{xf\quad x\quad 2f\quad x}{x^3}$，则$g\quad x\quad 0$，$g\ x$在

$0,$ 上是增函数，再根据在 ABC 中，$A\quad \frac{3}{4}$，得到$0\quad B\quad \frac{}{4}$，$0\quad C\quad \frac{}{4}$，利用余弦函数的单调性，得到$\cos\quad C\quad \sin\quad B$，再利用$g\quad x$的单调性求解.

【题目详解】

设$g\ x\quad \frac{f\ x}{x^2}$，

所以 $g\quad x\quad \frac{xf\quad x\quad 2f\quad x}{x^3}$，

因为当$x\quad 0$时，$f'\ x\quad \frac{2f\ x}{x}$，