第7章

非参数假设检验

回眸

- 1、配对样本设计、正态总体均值比较检验

$$t=\frac{\bar{d}-\mu_d}{S_d/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$ （小样本）

- 2、两独立样本设计、正态总体均值比较检验

（方差是否已知，方差是否齐性，大小样本）

$$t=\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$u=\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

$$u=\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}\,\&N(0,1)$$

$$t'=\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}\,\&t(df)$$

3、单方差χ^2检验、方差齐性F检验、总体率比较u检验。

假设 → 求统计量值 → 查临界值表 → 判断 → 结论

在参数假设检验中，

t检验(单样本t检验、配对t检验、两独立样本t检验)

u检验(方差已知时大小样本，方差未知时大样本)

χ^2检验（单样本方差=常数）

F检验（方差齐性检验）

都要求正态总体；

总体率比较的u检验：要求二项分布总体

- 即参数检验都要求总体分布已知
- 若总体分布不知，则只能用效能稍差的非参数检验方法（Nonparametric test）。

本章目标

1、掌握双向无序列联表的χ^2独立性检验；

两个或多个总体率比较的χ^2检验；

配对样本总体比较的符号秩和检验；

两独立样本总体比较的秩和检验。

2、熟悉χ^2拟合优度检验、多独立样本总体比较的秩和检验的基本思路。

3、了解单向有序列联表的秩和检验。

非参数检验：推断假设不依赖于总体分布或与总体的参数无关的假设检验方法。

非参数检验不需要已知总体分布类型，应用广泛。

- ✓ 拟合优度检验，如检验样本是否来自已知分布的总体；
- ✓ 检验两分类变量间独立性；
- ✓ 两个或多个总体率（如有效率、死亡率等）的比较检验；
- ✓ 两个或多个数值变量的比较检验。

优点：简单易懂，方法很多，应用广泛。

缺点：不能充分利用样本信息，特别是可用参数检验的问题，若采用了非参数检验，将会降低检验效能，增大犯第二类错误的概率。

一般的做法是当资料不满足参数检验条件时，再用非参数检验。

【案例7-1】（骰子均匀性）为考察骰子是否均匀，某研究者将一只骰子投掷了150次，掷出的点数结果见表：

点数X	1	2	3	4	5	6
频数n_i	23	32	24	21	30	20

问题：试检验此骰子是否均匀？（α=0.05）

【案例7-2】（血清治病）为研究某种血清是否会抑制白血病，选取16只白血病大鼠，随机分为治疗组和对照组，其中治疗组8只接受该血清治疗，对照组8只不作治疗，观察大鼠存活时间（月），其数据如下表所示：

治疗组（月）	3.1	5.3	1.4	4.6	2.8	4.0	3.8	5.5
对照组（月）	1.9	0.5	0.9	2.1	1.4	2.1	1.1	0.8

问题：若两个抽样总体的分布未知，试分析这种血清对白血病有无抑制作用？

第1节

拟合优度检验

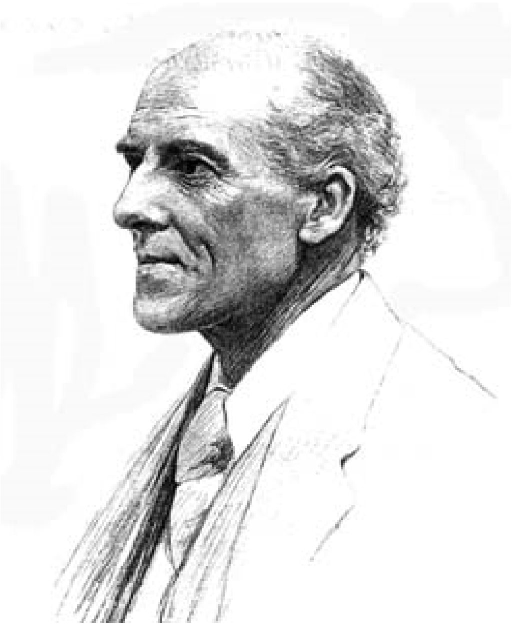
K.Pearson χ^2检验—**重要！**

- χ^2拟合优度检验
- 双向无序列联表的χ^2独立性检验
- 两个或多个总体率比较χ^2检验

K.Pearson x^2检验(Chi-square test)

是现代统计学的创始人之一，英国统计学家Karl Pearson（1857-1936）于1900年提出的一种具有广泛用途的统计方法。

（K.Pearson x^2检验）



Karl Pearson 1857~1936

拟合优度检验（goodness-of-fit test）：考察理论分布与样本数据实际分布是否吻合的检验。

其中皮尔逊（Pearson）χ^2检验是最常用的

常有两种类型：

1、总体与某个已知分布的拟合检验；

2、总体各分类发生比率与理论比例拟合检验。

如：通过调查一地区每年某稀有病例数，检验该稀有病各年发病数服从泊松分布.（也可检验定距变量服从某分布，只是要通过分组统计频数进行）

再如：某城市在第一季度出生婴儿850人，其中女婴411人，检验男婴与女婴之比是否符合107:100的理论比率。

1、检验总体是否服从某种已知分布

原假设 H_0:总体X服从某已知分布

基本思路：对样本进行统计分组，得到实际频数，并利用H_0为真时的已知分布计算理论频数，构造检验统计量，进行检验。

实际频数O_i：指总体X在各分组中样本值的个数，记作O_i，且$O_1+O_2+\cdots+O_k=n$。

理论频数E_i：指在H_0为真下，计算出的频数。在此先据已知分布算出总体X的值落在第i类中的概率p_i，则$E_i=np_i$就是第i类的理论频数。

【定理7-1】（皮尔逊χ^2 定理）当H_0为真时，不论X服从何种分布，当n充分大时，有

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}\sim\chi^2(k-r-1)$$

k为X的分类数，r为样本所估计的总体分布的参数个数。

基本步骤：

1）原假设 H_0:总体服从某已知分布 （如正态分布$N(\mu,\sigma^2)$）

2）若总体服从分布有未知参数，要明确其个数r，并计算其估计值，从而得到参数已知的分布。 $(r=2, N(\overline{x}, s^2))$

3）计算统计量值：

- ✓ 根据总体分类确定实际频数O_i；
- ✓ 在 H_0:为真下，利用已知分布求其对应概率p_i；
- ✓ 计算出理论频数$E_i=np_i$；
- ✓ 最后计算统计量值：

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}=\sum_{j=1}^{k}\frac{(O_i-np_i)^2}{np_i}\sim\chi^2(k-r-1)$$

4）查临界值 5）判断与结论

【注意】

(1)适合大样本(即一般要求样本容量$n \geq 40$)。

(2)要求各组理论频数$np_i \geq 5$。若某组或几组理论频数$np_i < 5$时，可通过并组使$np_i \geq 5$ 。

(3)若总体X服从分布含有r个未知参数，则需先进行点估计，得到分布参数。这时检验统计量服从的χ^2分布的自由度为 $df=k-r-1$。

2、检验实际频数与理论频数是否吻合

卡方检验不仅可检验总体分布，还可检验各种实际频数与理论频数是否吻合。 其基本步骤与前面类似。

如 某城市在第一季度出生婴儿850人，其中女婴411人，检验男婴与女婴之比是否符合107:100的理论比率。

【案例7-1】（前面案例）为考察骰子是否均匀，某研究者将一只骰子投掷了150次，掷出的点数结果见表7-1，试检验此骰子是否均匀？（α =0.05）

点数X	1	2	3	4	5	6
频数n_i	23	32	24	21	30	20

解：1）原假设 H_0:骰子是均匀的，即掷出各点的概率相等

显然，该总体分布无未知参数。

2）计算统计量值　实际频数O_i如表，当H_0为真时，各点数出现概率为

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$$

理论频数np_j：

$$np_i = 150 \times \frac{1}{6} = 25 \quad (i = 1, \ldots, 6)$$

统计量值为

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(O_j - np_j)^2}{np_j} = \frac{(23-25)^2}{25} + \ldots + \frac{(20-25)^2}{25} = 4.8$$

(3) 查临界值表，自由度 df=6-1=5，查χ ^{2}临界值表（附表5）得

$$\chi^2_{0.05}(5)=11.072$$

则拒绝域为[11.072,+∞)

4) 判断与结论，χ ^{2}=4.8不在拒绝域内，即P>0.05，故不能拒绝H_0，无充分理由说明骰子是不均匀的，即可认为骰子是均匀的。

【例7.1】某药师用随机抽样方法检查了某药100片，分组测量其含药量，检测结果如表7-3中(1)、(3)列所示，试用χ^2 检验法检验该药的含量是否服从正态分布（α =0.05）。

组限 $[x_i,\ x_{i+1})$ (1)	组中值 m_i (2)	实际频数f_i (3)	标准化组限 $[u_i,\ u_{i+1})$ (4)	概率 p_i (5)	理论频数np_i (6)	f_i-np_i	$\frac{(f_i-np_i)^2}{np_i}$
[illegible]	[illegible]	15	[illegible]	0.144	14.4	0.6	0.025
[illegible]	[illegible]	18	[illegible]	0.223	22.2	−4.2	0.822
49—	50.5	30	[illegible]	0.258	23.8	6.2	1.614
52—	53.5	14	[illegible]	0.176	17.6	−3.6	0.750
55—	56.5	11	[illegible]	0.090	[illegible]	[illegible]	[illegible]
58—	59.5	7	[illegible]	0.031	[illegible]	[illegible]	[illegible]
≥61	62.5	1	[illegible]	0.009	[illegible]	[illegible]	[illegible]
合计	[illegible]	100	[illegible]	1.000	100	[illegible]	[illegible]

2.5
6.4
8.9 0.1 0.001

9.0
3.1
0.9

解：(1) 原假设　H_0：该药的含量服从正态分布N(μ, σ²)

(2) 因正态分布有两个参数：均值 μ 与标准差 σ 均未知，需要点估计，利用组中值m_i和实际频数f_i得：

$$\hat{\mu}=\bar{x}\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}m_if_i=\frac{1}{100}(38.5\times3+41.5\times6+\cdots+62.5\times1)=49.54$$

$$\hat{\sigma}^2=S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}m_i^2f_i-\bar{x}^2=\frac{1}{100}(38.5^2\times3+41.5^2\times6+\cdots+62.5^2\times1)-49.54^2=23.558$$

$$\hat{\sigma}=S=\sqrt{S^2}=\sqrt{23.558}=4.854$$

注意要先求S^2再开方求S

故有原假设H_0：X服从正态分布$N(49.54,\ 4.854^2)$

(3) 计算统计量　当假设H_0为真时：　$X \sim N(49.54,\ 4.854^2)$

1) 将表7-3第（1）列x的组限作标准化处理，即化x为标准正态变量u，得第（4）列组限；

2）查标准正态分布表（附表3），可计算各区间的概率p_i，得第（5）列数据；

3）求理论频数np_i，得第（5）列数据；

$$u = \frac{x - 49.54}{4.854}$$

对第（8）列求和得χ^2值：

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i} = 3.269$$

（4）查表：因有理论频数小于5的组，需合并，见表7-3。资料最终合并成6组，有2个参数 μ 和 σ 由样本估计。

故 χ^2的自由度df=6-2-1=3，查χ^2临界值表（附表5）得

$$\chi^2_{0.05}(3) = 7.815$$

则拒绝域为[7.815,+∞)

（5）判断与结论　　由于 x^2=3.269不在拒绝域内，P>0.05，故不能拒绝H_0，可认为该药的含量服从正态分布。

【练习】P165　（三） 2

第二节

列联表的χ^2检验

χ^2检验—重要！

- χ^2拟合优度检验
- 双向无序列联表的χ^2独立性检验
- 两个或多个总体率比较的χ^2检验

是用于多重分类的一种频数分布表，是分析定性数据的常用表格形式

列联表（contingency table）将每个观测对象按行和列分两方面的属性，行和列的属性又分为R和C种分类，从而其表中数据有R行C列，故常称为$R\times C$列联表，简称$R\times C$表。

行和

RxC（二维）列联表

	Y_1	Y_2	$\cdots$	Y_c	$O_{i\bullet}$
X_1	O_{11}	O_{12}	$\cdots$	O_{1c}	$O_{1\bullet}$
X_2	O_{21}	O_{22}	$\cdots$	O_{2c}	$O_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_r	O_{r1}	O_{r2}	$\cdots$	O_{rc}	$O_{r\bullet}$
$O_{\bullet j}$	$O_{\bullet 1}$	$O_{\bullet 2}$	$\cdots$	$O_{\bullet c}$	n

列和

一、列联表的χ^2独立性检验

◆RXC列联表的独立性检验

适应资料类型：双向无序列联表资料。

基本步骤：

1）原假设：H_0:行列属性相互独立

2）求统计量值：

✓在H_0:成立时，由列联表计算理论频数： $E_{ij}=\frac{O_{i.}\times O_{.j}}{n}$

✓计算统计量值：

$$\chi^2=\sum_{j=1}^{C}\sum_{i=1}^{R}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}\sim\chi^2[(R-1)(C-1)]$$

3）查临界值 4）判断与结论

【例7-2】某药厂为了探讨根据药物的外观状况判断药物内在质量的可能性，随机抽取若干同类药品，在相同条件下放置6个月，分别检验其内在质量X与外观状况Y，得检验数据见表7-6，试分析药物的内在质量X与外观状况Y这两种属性之间是否独立？（α=0.01）

内在质量 X	外观状况 Y			合计
	好	中	差	
好	35(22.9)	15(18.5)	5(13.6)	55
中	8(14.1)	19(11.4)	7(8.4)	34
差	4(10.0)	4(8.1)	16(5.9)	24
合计	47	38	28	113

本例是双向有序列联表，最佳的检验方法应该是Kappa一致性检验。

解：（1）原假设　H_0:药物的属性X与Y相互独立

（2）求统计量值

当H_0成立时，计算理论频数，填入表中，n=113

$$\chi^2=\frac{(35-22.9)^2}{22.9}+\ldots+\frac{(16-5.9)^2}{5.9}=43.097$$

（3）查表　自由度df=(r-1)(c-1)=(3-1)(3-1)=4

查附表5得

$$\chi^2_{0.01}(4)=13.277$$

则拒绝域为$[13.277,+\infty)$

(4)比较与结论　因χ^2=43.097在拒绝域内，即P<0.01，故拒绝H_0，说明药物的两种属性独立是没有统计学意义的，因而从药物外观状况判断药物内在质量的可能性是存在的　。

◆2X2列联表的独立性检验

适应资料类型：所有2x2列联表资料。

2x2列联表也称四格表，一般形式为：

	Y_1	Y_2	行和
X_1	a	b	$a+b$
X_2	c	d	$c+d$
列和	$a+c$	$+d$	$n=a+b+c+d$

实际频数为a, b, c, d

基本步骤：

1）原假设：H_0:行列属性相互独立

2）求统计量值：

在H_0:成立时，计算统计量值：

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \sim \chi^2[1]$$

四格表χ²-检验的自由度为(2-1)x(2-1)=1

3）查临界值 4）判断与结论

【例7-3】某医生将两种药物在60名受试者的不同部位进行药敏试验，试验结果见表7-8。试问两种药物的结果是否有关联？（α=0.05）

药物A	药物B		合计
	阳性	阴性	
阳性	28（18.1）	6（15.9）	34
阴性	4（13.9）	22（12.1）	26
合计	32	28	60

解：(1) 原假设　H_0：两种药物的药敏结果无关联

(2) 求统计量值

由表得，a=28，b=6，c=4，d=22，n=60

在H_0：成立时，计算统计量值：

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = 26.55$$

(3) 查表　查附表5得　$\chi^2_{0.05}(1) = 3.841$

(4) 比较与结论　因χ^2=26.55>3.841，即P<0.05，故拒绝H_0，可以认为两种药物的药敏结果有关联。

【注意】

（1）当n≥40 且每格E≥5时，四格表专用检验统计量；

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}\sim\chi^2(1)$$

（2）当n≥40 但有1≤ E ＜ 5时，用校正检验统计量；

$$\chi^2=\frac{n(|ad-bc|-0.5n)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}\sim\chi^2(1)$$

（3）当n ＜ 40 或有E ＜ 1时，不能应用 x^2 检验，要用费希尔精确概率检验法。

【练习】**P165 （三） 3,5**