江苏省南通市2024届高三高考考前押题卷（最后一卷）数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知复数 z 满足 $\left(1+\mathrm{i}\right)z=\left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|$，则 $\overline{z}=$（　）

A．$1-\mathrm{i}$　　B．$1+\mathrm{i}$　　C．$2-2\mathrm{i}$　　D．$2+2\mathrm{i}$

2．某工厂利用随机数表对生产的50个零件进行抽样测试，先将50个零件进行编号，编号分别为01，02，…，50，从中抽取5个样本，下面提供随机数表的第1行到第2行：

66	67	40	37	14	64	05	71	11	05	65	09	95	86	68	76	83	20	37	90
57	16	03	11	63	14	90	84	45	21	75	73	88	05	90	52	23	59	43	10

若从表中第1行第9列开始向右依次读取数据，则得到的第4个样本编号是（　）

A．10　　B．09　　C．71　　D．20

3．若函数 $f(x)=x(1+\dfrac{m}{1-\mathrm{e}^{x}})$ 是偶函数，则 $m=$（　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

4．“$a=0$”是“直线 $l_1:x+2ay-2024=0$ 与直线 $l_2:(a-1)x+ay+2024=0$ 平行”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．设 $\vec{a},\vec{b}$ 为单位向量，$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 $-\dfrac{1}{2}\vec{b}$，则 $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=$（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{7}$

6．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，过点 A 且以 $\overrightarrow{DB_1}$ 为法向量的平面为 α，则 α 截该正方体所得截面的形状为（　）

A．三角形　　B．四边形　　C．五边形　　D．六边形

7．已知角 α,β 满足 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3},2\sin\beta=\cos\left(\alpha+\beta\right)\sin\alpha$，则 $\tan\beta=$（　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{6}$　　C．$\dfrac{1}{7}$　　D．2

8．已知椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，下顶点为A，直线 AF_1 交 C 于另一点 B，$\triangle ABF_2$ 的内切圆与 BF_2 相切于点 P．若 $\left|BP\right|=\left|F_1F_2\right|$，则 C 的离心率为（　）

A．$\frac{1}{3}$　　　　B．$\frac{1}{2}$　　　　C．$\frac{2}{3}$　　　　D．$\frac{3}{4}$

二、多选题

9．设 U 为全集，集合 A、B、C 满足 $A\cup B=A\cup C$，则下列各式中不一定成立的是（　　）

A．$B\subseteq A$

B．$C\subseteq A$

C．$A\cap\left(\complement_U B\right)=A\cap\left(\complement_U C\right)$

D．$\left(\complement_U A\right)\cap B=\left(\complement_U A\right)\cap C$

10．已知点 P 在圆 $\left(x-5\right)^2+\left(y-5\right)^2=16$ 上，点 $A\left(4,0\right)$、$B\left(0,2\right)$，则（　　）

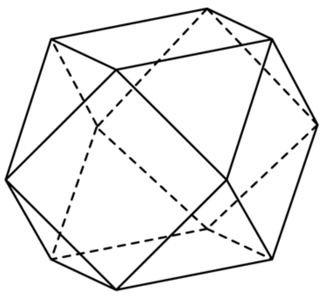
A．点 P 到直线 AB 的距离小于 10

B．点 P 到直线 AB 的距离大于 2

C．当 $\angle PBA$ 最小时，$\left|PB\right|=3\sqrt{2}$

D．当 $\angle PBA$ 最大时，$\left|PB\right|=3\sqrt{2}$

11．“阿基米德多面体”也称为半正多面体，是由边数不全相同的正多边形为面围成的多面体，它体现了数学的对称美.如图，是一个八个面为正三角形，六个面为正方形的“阿基米德多面体”，某玩具厂商制作一个这种形状棱长为 6cm，重量为 360g 的实心玩具，则下列说法正确的是（　　）



A．将玩具放到一个正方体包装盒内，包装盒棱长最小为 $6\sqrt{2}\text{cm}$.

B．将玩具放到一个球形包装盒内，包装盒的半径最小为 $4\sqrt{2}\text{cm}$.

C．将玩具以正三角形所在面为底面放置，该玩具的高度为 $3\sqrt{10}\text{cm}$.

D．将玩具放至水中，其会飘浮在水面上.

三、填空题

12．已知函数 $f\left(x\right)=\sin 2x$，若存在非零实数 a，b，使 $f\left(x+a\right)=bf\left(x\right)$ 恒成立，则满足条件的一组值可以是 $a=$______，$b=$_____.

13．把 5 个人安排在周一至周五值班，要求每人值班一天，每天安排一人，甲乙安排在不相邻的两天，乙丙安排在相邻的两天，则不同的安排方法有______种.

14．方程 $x^{\ln 3}+x^{\ln 4}=x^{\ln 5}$ 的正实数解为_____.

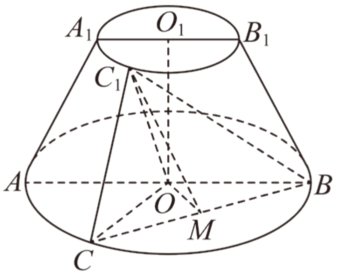
四、解答题

15．在锐角 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a，b，c，满足 $\dfrac{\sin A}{\sin C}-1=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 C}{\sin^2 B}$，且 $A\neq C$.

(1)求证：$B=2C$；

(2)已知 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，若 $a=4$，求线段 BD 长度的取值范围.

16．如图，四边形 ABB_1A_1 是圆台 OO_1 的轴截面，CC_1 是圆台的母线，点 C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点．已知 $AB=2A_1B_1=4$，点 M 是 BC 的中点.



(1)若直线 OO_1 与直线 C_1M 所成角为 $\dfrac{\pi}{4}$，证明：$CC_1\perp$ 平面 OBC_1；

(2)记直线 MC_1 与平面 ABC 所成角为 α，平面 OMC_1 与平面 BCC_1 的夹角为 θ，若 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，求 α.

17．某旅游景区在手机 APP 上推出游客竞答的问卷，题型为单项选择题，每题均有 4 个选项，其中有且只有一项是正确选项.对于游客甲，在知道答题涉及的内容的条件下，可选出唯一的正确选项；在不知道答题涉及的内容的条件下，则随机选择一个选项.已知甲知道答题涉及内容的题数占问卷总题数的 $\dfrac{1}{3}$.

(1)求甲任选一题并答对的概率;

(2)若问卷答题以题组形式呈现，每个题组由 2 道单项选择题构成，每道选择题答对得 2 分，答错扣 1 分，放弃作答得 0 分.假设对于任意一道题，甲选择作答的概率均为$\frac{2}{3}$，且两题是否选择作答及答题情况互不影响，记每组答题总得分为X，

①求$P\left(X=4\right)$和$P\left(X=-2\right)$

②求$E\left(X\right)$

18．已知抛物线$E:y^{2}=2px(p>0)$，双曲线$C:x^{2}-\frac{y^{2}}{p^{2}}=1$，点$A\left(x_1,y_1\right)$在$C$的左支上，过A作$x$轴的平行线交$E$于点$M$，过$M$作$E$的切线$l_1$，过A作直线$l_2$交$l_1$于点$P$，交$E$于点$N$，且$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PN}$.

(1)证明：l_2与E相切；

(2)过N作x轴的平行线交C的左支于点$B\left(x_2,y_2\right)$，过P的直线l_3平分$\angle MPN$，记l_3的斜率为$k,\angle MPN=\theta$，若$\cos\theta=-k^{2}$，证明：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$恒为定值.

19．若$\forall n\in\mathrm{N}^{*}$，都存在唯一的实数$c_n$，使得$f\left(c_n\right)=n$，则称函数$f\left(x\right)$存在“源数列”$\left\{c_n\right\}$.已知$f\left(x\right)=\sqrt{x}-\ln x,x\in\left(0,1\right]$.

(1)证明：$f\left(x\right)$存在源数列；

(2)（ⅰ）若$f\left(x\right)-\frac{\lambda}{\sqrt{x}}\le 0$恒成立，求$\lambda$的取值范围；

（ⅱ）记$f\left(x\right)$的源数列为$\left\{c_n\right\}$，证明：$\left\{c_n\right\}$前n项和$S_n<\frac{5}{3}$.

参考答案：

1．B

【分析】根据复数的四则运算法则和求复数的模长公式，化简已知条件，得到复数 z，再求复数 z 的共轭复数，得 $\overline{z}$.

【详解】因为 $\left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(-1\right)^2}=2$，所以 $\left(1+\mathrm{i}\right)z=2$，

则 $z=\dfrac{2}{\left(1+\mathrm{i}\right)}=\dfrac{2\left(1-\mathrm{i}\right)}{\left(1+\mathrm{i}\right)\left(1-\mathrm{i}\right)}=1-\mathrm{i}$，则 $\overline{z}=1+\mathrm{i}$.

故选：B

2．B

【分析】按照题意依次读出前 4 个数即可.

【详解】从随机数表第 1 行的第 9 列数字开始由左向右每次连续读取 2 个数字，删除超出范围及重复的编号，符合条件的编号有 14，05，11，09，

所以选出来的第 4 个个体的编号为 09，

故选：B

3．A

【分析】由题意可得 $f(-x)=f(x)$，化简整理即可求得 m 的值.

【详解】函数 $f(x)=x(1+\dfrac{m}{1-\mathrm{e}^x})$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq 0\}$，由 $f(x)$ 是偶函数，得 $f(-x)=f(x)$，

即 $-x(1+\dfrac{m}{1-\mathrm{e}^{-x}})=x(1+\dfrac{m}{1-\mathrm{e}^x})$，整理得 $\dfrac{m(\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x-1}=-2$，所以 $m=-2$.

故选：A

4．D

【分析】求出直线平行的充要条件为 $a=\dfrac{3}{2}$，结合充分条件、必要条件的定义即可得解.

【详解】若 $l_1//l_2$，则有 $1\times a=2a(a-1)$，所以 $a=0$ 或 $a=\dfrac{3}{2}$，

当 $a=0$ 时，$l_1:x-2024=0,l_2:-x+2024=0$，故 l_1，l_2 重合；

当 $a=\dfrac{3}{2}$ 时，$l_1:x+3y-2024=0,l_2:\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}y+2024=0$，满足条件，

所以“$a=0$”是“$l_1//l_2$”的既不充分也不必要条件，

故选：D.

5．D

【分析】根据投影向量的定义，结合平面向量数量积的运算性质进行求解即可.

【详解】因为$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量为$-\frac{1}{2}\vec{b}$，

所以$-\frac{1}{2}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\Rightarrow-\frac{1}{2}\vec{b}=(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$，

所以有$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-2\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{b}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{1+4-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{7}$，

故选：D

6．A

【分析】作出辅助线，根据线面垂直的判定定理得到$DB_1\perp$平面ACD_1，故平面α即为平面ACD_1，得到截面的形状.

【详解】连接AC,AD_1,CD_1,BD，

因为$BB_1\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，

所以$BB_1\perp AC$，

又四边形$ABCD$为正方形，所以$BD\perp AC$，

又$BB_1\cap BD=B$，$BB_1,BD\subset$平面BB_1D，

所以$AC\perp$平面BB_1D，

因为$B_1D\subset$平面BB_1D，

所以$AC\perp B_1D$，

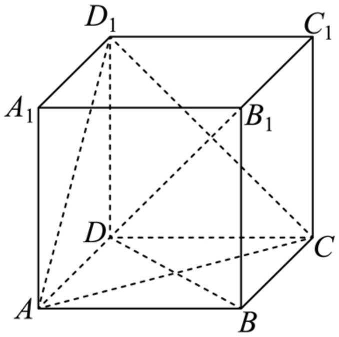
同理可证明$AD_1\perp B_1D$，

因为$AD_1\cap AC=A$，$AD_1,AC\subset$平面ACD_1，

故$B_1D\perp$平面ACD_1，

故平面α即为平面ACD_1，

则α截该正方体所得截面的形状为三角形.



故选：A

7．C

【分析】借助$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$对已知化简，可求出$\tan(\alpha+\beta)$的值，再由

$\tan\beta=\tan((\alpha+\beta)-\alpha)$可解.

【详解】因为$2\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，即$2\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，

所以$2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，

整理得$2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，变形得$\tan(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}\tan\alpha=\frac{1}{2}$，

所以$\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{1}{7}$.

故选：C

8．B

【分析】由三角形内切圆的性质得出$\triangle ABF_2$的周长为$4c+2a$，再由椭圆的定义得$\triangle ABF_2$的周长为$4a$，列出等式即可求解.

【详解】设椭圆的长轴长为$2a$，短轴长为$2b$，焦距为$2c$，则$|BP|=|F_1F_2|=2c$，$|AF_2|=a$，

设$\triangle ABF_2$的内切圆与AF_1，AF_2相切于点M,N，如图所示，

则$|AM|=|AN|,|PF_2|=|NF_2|$，$|BP|=|BM|=2c$，

所以$|AF_2|=|AN|+|NF_2|=|AM|+|PF_2|=a$，

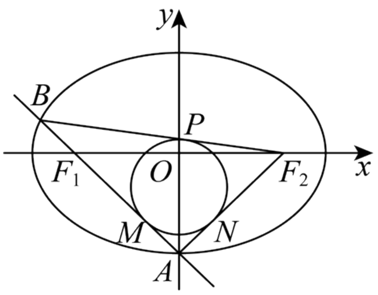
所以$\triangle ABF_2$的周长为$|AB|+|AF_2|+|BF_2|=(|BM|+|AM|)+(|AN|+|NF_2|)+(|BP|+|PF_2|)$

$=4c+2a$，

由椭圆定义可得，$|AB|+|AF_2|+|BF_2|=4a$，

所以$4c+2a=4a$，则$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，

故选：B．



9．ABC

【分析】结合举例及集合的运算和集合的关系求解即可.

【详解】对于 ABC，当$U=\{1,2,3\}$，$A=\{1\}$，$B=\{2,3\}$，$C=\{1,2,3\}$时，满足

$A\cup B=A\cup C$，

此时 A □ B，A □ C，所以 A、B 不一定成立；

$\complement_U B=\{1\},\complement_U C=\varnothing$，$A\cap(\complement_U B)=\{1\},A\cap(\complement_U C)=\varnothing$，所以 C 不一定成立；

对于 D，$\forall x\in(\complement_U A)\cap B$，则$x\notin A$，但$x\in B$，因为$A\cup B=A\cup C$，

所以$x\in C$，于是$x\in(\complement_U A)\cap C$，所以$(\complement_U A)\cap B\subseteq(\complement_U A)\cap C$，

同理，$\forall x\in(\complement_U A)\cap C$，则$x\in(\complement_U A)\cap B$，$(\complement_U A)\cap B\supseteq(\complement_U A)\cap C$，

因此，$(\complement_U A)\cap B=(\complement_U A)\cap C$成立，D 成立.

故选：ABC.

10．ACD

【分析】计算出圆心到直线AB的距离，可得出点P到直线AB的距离的取值范围，可判断 AB 选项的正误；分析可知，当$\angle PBA$最大或最小时，PB与圆M相切，利用勾股定理可判断 CD 选项的正误.

【详解】圆$(x-5)^2+(y-5)^2=16$的圆心为$M(5,5)$，半径为4，

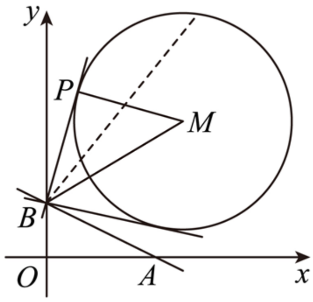
直线AB的方程为$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$，即$x+2y-4=0$，

圆心M到直线AB的距离为$\frac{|5+2\times5-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{11}{\sqrt{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{5}>4$，

所以，点P到直线AB的距离的最小值为$\frac{11\sqrt{5}}{5}-4<2$，最大值为$\frac{11\sqrt{5}}{5}+4<10$

，A 选项正确，B 选项错误；

如下图所示：



当$\angle PBA$最大或最小时，PB与圆M相切，连接MP、BM，可知$PM \perp PB$，

$|BM|=\sqrt{(0-5)^2+(2-5)^2}=\sqrt{34}$，$|MP|=4$，由勾股定理可得$|BP|=\sqrt{|BM|^2-|MP|^2}=3\sqrt{2}$，

CD 选项正确.

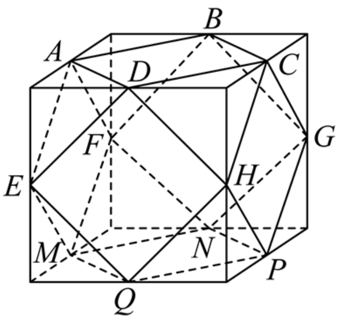
故选：ACD.

【点睛】结论点睛：若直线l与半径为r的圆C相离，圆心C到直线l的距离为d，则圆C上一点P到直线l的距离的取值范围是$[d-r,d+r]$.

11．AD

【分析】利用补体法求得正方体棱长判断 A，利用对称性得球的直径判断 B，求解两平行平面的距离判断 C，先求出几何体的体积，通过与水密度的大小比较即可判断 D.

【详解】将该几何体放置在如图的正方体中，



对于 A，将玩具放到一个正方体包装盒内，包装盒棱长最小为图中正方体的棱长，

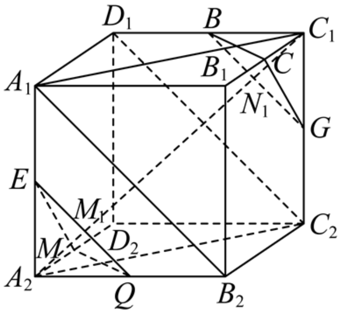
由题意，该几何的棱长为$|AB|=6\text{cm}$，所以正方体的棱长为$\frac{6\times 2}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}\text{cm}$，正确；

对于 B，将玩具放到一个球形包装盒内，包装盒的半径最小为该几何体外接球的半径，

根据正方体和多面体的对称性知，该几何体外接球直径为正方体面对角线，即$2R=12$，解得$R=6$，

所以包装盒的半径最小为6cm，错误；

对于C，将玩具以正三角形所在面为底面放置，该玩具的高度为两平行平面EMQ与平面BCG的距离，证明求解过程如下：如图，



不妨记正方体为$A_2B_2C_2D_2-A_1B_1C_1D_1$，$A_1D_1//B_2C_2$，$A_1D_1=B_2C_2$，

故四边形$A_1D_1C_2B_2$是平行四边形，所以$A_1B_2//C_2D_1$，

又E，Q分别为A_1A_2，A_2B_2的中点，所以$EQ//A_1B_2$，同理$BG//C_2D_1$，

所以$EQ//BG$，又$EQ\not\subset$平面BCG，$BG\subset$平面BCG，

所以$EQ//$平面BCG，同理$EM//$平面BCG，

又$EM\cap EQ=E$，EM，$EQ\subset$平面EMQ，所以平面$EMQ//$平面BCG，

设对角线A_2C_1分别交平面EMQ和平面BCG于点M_1，N_1，

因为$C_1C_2\perp$平面$A_2B_2C_2D_2$，$MQ\subset$平面$A_2B_2C_2D_2$，所以$C_1C_2\perp MQ$，

连接A_2C_2,A_1C_1，因为M,Q分别为A_2D_2,A_2B_2的中点，

故$A_2C_2\perp MQ$，又C_1C_2，$A_2C_2\subset$平面$A_1A_2C_2C_1$，$C_1C_2\cap A_2C_2=C_2$，

所以$MQ\perp$平面$A_1A_2C_2C_1$，又$A_2C_1\subset$平面$A_1A_2C_2C_1$，所以$A_2C_1\perp MQ$，

同理$A_2C_1\perp EQ$，又$MQ\cap EQ=Q$，MQ，$EQ\subset$平面EMQ，所以$A_2C_1\perp$平面EMQ，

又平面$EMQ//$平面BCG，所以$A_2C_1\perp$平面BCG，

故$|M_1N_1|$即为平面EMQ与平面BCG的距离，

则$|M_1N_1|=|A_2C_1|-|A_2M_1|-|N_1C_1|$，由正方体棱长为$6\sqrt{2}$得$|A_2C_1|=6\sqrt{6}$，

由题意得$EA_2=MA_2=QA_2=3\sqrt{2}$，$\triangle EMQ$为等边三角形，故$S_{\triangle EMQ}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=9\sqrt{3}$，

根据$V_{E-A_2MQ}=V_{A_2-EMQ}$，得$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=\frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times|A_2M_1|$，