

## 上海市市北初级中学 2024 届高三 3 月月考试题

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂; 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写, 字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁, 不要折叠, 不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_n > 0$ ,  $q > 1$ ,  $a_3 + a_5 = 20$ ,  $a_2 a_6 = 64$ , 则  $S_5 = ( )$   
A. 48                      B. 36                      C. 42                      D. 31
2. 已知盒中有 3 个红球, 3 个黄球, 3 个白球, 且每种颜色的三个球均按  $A, B, C$  编号, 现从中摸出 3 个球 (除颜色与编号外球没有区别), 则恰好不同时包含字母  $A, B, C$  的概率为  $( )$   
A.  $\frac{17}{21}$                       B.  $\frac{19}{28}$                       C.  $\frac{7}{9}$                       D.  $\frac{23}{28}$
3. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ , 点  $M$  满足  $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}$ , 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$  等于  $( )$   
A. 10                      B. 9                      C. 8                      D. 7
4. 设复数  $z$  满足  $|z - 2i| = |z + 1|$ ,  $z$  在复平面内对应的点为  $(x, y)$ , 则  $( )$   
A.  $2x - 4y - 3 = 0$       B.  $2x + 4y - 3 = 0$       C.  $4x + 2y - 3 = 0$       D.  $2x - 4y + 3 = 0$
5. 设某大学的女生体重  $y$  (单位: kg) 与身高  $x$  (单位: cm) 具有线性相关关系, 根据一组样本数据  $(x_i, y_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 用最小二乘法建立的回归方程为  $\hat{y} = 0.85x - 85.71$ , 则下列结论中不正确的是  
A.  $y$  与  $x$  具有正的线性相关关系  
B. 回归直线过样本点的中心  $(\bar{x}, \bar{y})$   
C. 若该大学某女生身高增加 1cm, 则其体重约增加 0.85kg  
D. 若该大学某女生身高为 170cm, 则可断定其体重比为 58.79kg
6. 若  $(1+ax)(1+x)^5$  的展开式中  $x^2, x^3$  的系数之和为  $-10$ , 则实数  $a$  的值为  $( )$   
A.  $-3$                       B.  $-2$                       C.  $-1$                       D.  $1$
7. 已知函数  $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ . 下列命题: ①函数  $f(x)$  的图象关于原点对称; ②函数  $f(x)$  是周期函数; ③当  $x = \frac{\pi}{2}$  时, 函数  $f(x)$  取最大值; ④函数  $f(x)$  的图象与函数  $y = \frac{1}{x}$  的图象没有公共点, 其中正确命题的序号是  $( )$   
A. ①④                      B. ②③                      C. ①③④                      D. ①②④
8. 过抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点  $F$  的直线与抛物线交于  $A, B$  两点, 且  $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$ , 抛物线的准线  $l$  与  $x$  轴交于

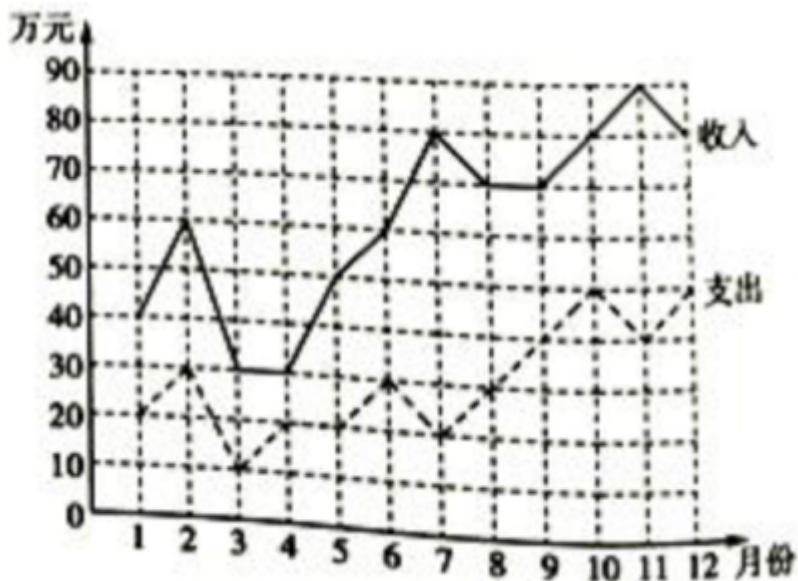
C,  $\triangle ACF$  的面积为  $8\sqrt{2}$ , 则  $|AB| = ( \quad )$

- A. 6                      B. 9                      C.  $9\sqrt{2}$                       D.  $6\sqrt{2}$

9. 已知平面向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ , 且  $(\sqrt{2}\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$ , 则  $\vec{a}, \vec{b}$  所夹的锐角为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{4}$                       C.  $\frac{\pi}{3}$                       D. 0

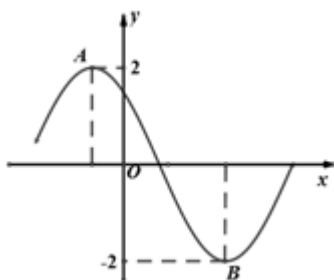
10. 已知某超市 2018 年 12 个月的收入与支出数据的折线图如图所示:



根据该折线图可知, 下列说法错误的是 ( )

- A. 该超市 2018 年的 12 个月中的 7 月份的收益最高  
 B. 该超市 2018 年的 12 个月中的 4 月份的收益最低  
 C. 该超市 2018 年 1-6 月份的总收益低于 2018 年 7-12 月份的总收益  
 D. 该超市 2018 年 7-12 月份的总收益比 2018 年 1-6 月份的总收益增长了 90 万元

11. 函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$ ) 的部分图像如图所示, 若  $AB = 5$ , 点 A 的坐标为  $(-1, 2)$ , 若将函数  $f(x)$  向右平移  $m(m > 0)$  个单位后函数图像关于  $y$  轴对称, 则  $m$  的最小值为 ( )



- A.  $\frac{1}{2}$                       B. 1                      C.  $\frac{\pi}{3}$                       D.  $\frac{\pi}{2}$

12. 设  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $a_3 = -3$ ,  $S_7 = -7$ , 则  $S_n$  的最小值为 ( )

- A. -12                      B. -15                      C. -16                      D. -18

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13.  $\left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$  的展开式中二项式系数最大的项的系数为\_\_\_\_\_ (用数字作答)。

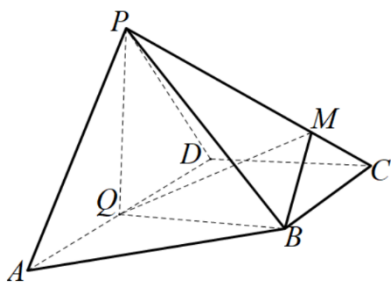
14. 抛物线  $y = 4x^2$  的焦点  $F$  到准线  $l$  的距离为\_\_\_\_\_。

15.  $(x+y)(2x-y)^5$  的展开式中  $x^3y^3$  的系数为\_\_\_\_\_。

16. 已知函数  $f(x) = ax \ln x - bx$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 在点  $(e, f(e))$  处的切线方程为  $y = 3x - e$ , 则  $a+b =$ \_\_\_\_\_。

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为直角梯形,  $AD \parallel BC$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ , 平面  $PAD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $Q$  为  $AD$  的中点,  $M$  是棱  $PC$  上的点且  $PM = 3MC$ ,  $PA = PD = 2$ ,  $BC = \frac{1}{2}AD = 1$ ,  $CD = 2$ 。



(1) 求证: 平面  $PQB \perp$  平面  $PAD$ ;

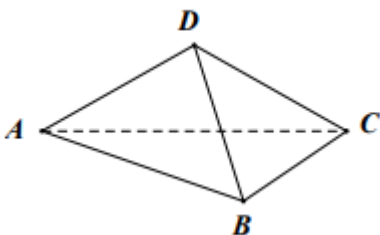
(2) 求二面角  $M-BQ-C$  的大小。

18. (12分) 已知函数  $f(x) = \frac{ax}{e^x}$  ( $a \neq 0$ )。

(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2) 当  $a = 1$  时, 如果方程  $f(x) = t$  有两个不等实根  $x_1, x_2$ , 求实数  $t$  的取值范围, 并证明  $x_1 + x_2 > 2$ 。

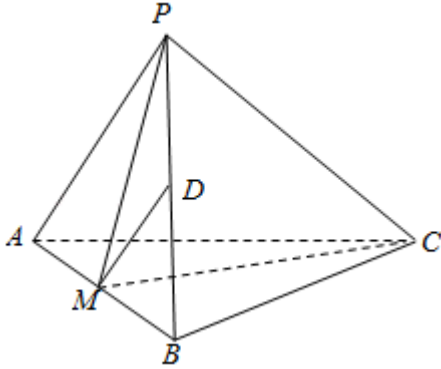
19. (12分) 如图, 在四面体  $DABC$  中,  $AB \perp BC$ ,  $DA = DC = DB$ 。



(1) 求证:平面  $ABC \perp$  平面  $ACD$ ;

(2) 若  $AD = 2$ ,  $AB = 2BC$ ,  $\angle CAD = 30^\circ$ , 求四面体  $ABCD$  的体积.

20. (12分) 如图, 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $AB \perp PC$ ,  $M$  是  $AB$  的中点, 点  $D$  在  $PB$  上,  $MD \parallel$  平面  $PAC$ , 平面  $PAB \perp$  平面  $PMC$ ,  $\triangle CPM$  为锐角三角形, 求证:



(1)  $D$  是  $PB$  的中点;

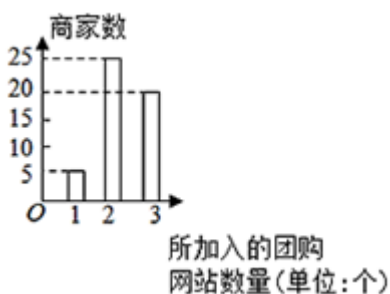
(2) 平面  $ABC \perp$  平面  $PMC$ .

21. (12分) 已知函数  $f(x) = |x+2| + |x-4|$ .

(1) 求不等式  $f(x) \leq 3x$  的解集;

(2) 若  $f(x) \geq k|x-1|$  对任意  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 求  $k$  的取值范围.

22. (10分) 团购已成为时下商家和顾客均非常青睐的一种省钱、高校的消费方式, 不少商家同时加入多家团购网. 现恰有三个团购网站在  $A$  市开展了团购业务,  $A$  市某调查公司为调查这三家团购网站在本市的开展情况, 从本市已加入了团购网站的商家中随机地抽取了 50 家进行调查, 他们加入这三家团购网站的情况如下图所示.



(1) 从所调查的 50 家商家中任选两家, 求他们加入团购网站的数量不相等的概率;

(2) 从所调查的 50 家商家中任取两家, 用  $\xi$  表示这两家商家参加的团购网站数量之差的绝对值, 求随机变量  $\xi$  的分布列和数学期望;

(3) 将频率视为概率, 现从  $A$  市随机抽取 3 家已加入团购网站的商家, 记其中恰好加入了两个团购网站的商家数为  $\eta$ , 试求事件“ $\eta \geq 2$ ”的概率.

## 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

试题分析：由于在等比数列  $\{a_n\}$  中，由  $a_2a_6 = 64$  可得：  $a_3a_5 = a_2a_6 = 64$ ，

又因为  $a_3 + a_5 = 20$ ，

所以有：  $a_3, a_5$  是方程  $x^2 - 20x + 64 = 0$  的二实根，又  $a_n > 0$ ，  $q > 1$ ，所以  $a_3 < a_5$ ，

故解得：  $a_3 = 4, a_5 = 16$ ，从而公比  $q = \sqrt{\frac{a_5}{a_3}} = 2, a_1 = 1$ ；

那么  $S_5 = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 31$ ，

故选 D.

考点：等比数列.

2、B

【解析】

首先求出基本事件总数，则事件“恰好不同时包含字母  $A, B, C$ ”的对立事件为“取出的 3 个球的编号恰好为字母  $A, B, C$ ”，记事件“恰好不同时包含字母  $A, B, C$ ”为  $E$ ，利用对立事件的概率公式计算可得；

【详解】

解：从 9 个球中摸出 3 个球，则基本事件总数为  $C_9^3 = 84$  (个)，

则事件“恰好不同时包含字母  $A, B, C$ ”的对立事件为“取出的 3 个球的编号恰好为字母  $A, B, C$ ”

记事件“恰好不同时包含字母  $A, B, C$ ”为  $E$ ，则  $P(E) = 1 - \frac{3^3}{C_9^3} = \frac{19}{28}$ .

故选：B

【点睛】

本题考查了古典概型及其概率计算公式，考查了排列组合的知识，解答的关键在于正确理解题意，属于基础题.

3、D

【解析】

利用已知条件，表示出向量  $\vec{AM}$ ，然后求解向量的数量积。

【详解】

在  $\triangle ABC$  中， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AC = 4$ ，点  $M$  满足  $\vec{BM} = 2\vec{MC}$ ，可得  $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$ 。

则  $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AB} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}\right) = \frac{1}{3}\vec{AB}^2 + \frac{2}{3}\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 + \frac{2}{3} \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 7$ 。

【点睛】

本题考查了向量的数量积运算，关键是利用基向量表示所求向量。

4、B

【解析】

设  $z = x + yi$ ，根据复数的几何意义得到  $x$ 、 $y$  的关系式，即可得解；

【详解】

解：设  $z = x + yi$

$\because |z - 2i| = |z + 1|$ ， $\therefore x^2 + (y - 2)^2 = (x + 1)^2 + y^2$ ，解得  $2x + 4y - 3 = 0$ 。

故选：B

【点睛】

本题考查复数的几何意义的应用，属于基础题。

5、D

【解析】

根据  $y$  与  $x$  的线性回归方程为  $y = 0.85x - 85.71$ ，则

$\hat{b} = 0.85 > 0$ ， $y$  与  $x$  具有正的线性相关关系，A 正确；

回归直线过样本点的中心  $(\bar{x}, \bar{y})$ ，B 正确；

该大学某女生身高增加 1cm，预测其体重约增加 0.85kg，C 正确；

该大学某女生身高为 170cm，预测其体重约为  $0.85 \times 170 - 85.71 = 58.79\text{kg}$ ，D 错误。

故选 D。

6、B

【解析】

由  $(1 + ax)(1 + x)^5 = (1 + x)^5 + ax(1 + x)^5$ ，进而分别求出展开式中  $x^2$  的系数及展开式中  $x^3$  的系数，令二者之和等于 -10，

可求出实数  $a$  的值。

**【详解】**

$$\text{由 } (1+ax)(1+x)^5 = (1+x)^5 + ax(1+x)^5,$$

则展开式中  $x^2$  的系数为  $C_5^2 + aC_5^1 = 10 + 5a$ , 展开式中  $x^3$  的系数为  $C_5^3 + aC_5^2 = 10 + 10a$ ,

二者的系数之和为  $(10 + 5a) + (10a + 10) = 15a + 20 = -10$ , 得  $a = -2$ .

故选: B.

**【点睛】**

本题考查二项式定理的应用, 考查学生的计算求解能力, 属于基础题.

7、A

**【解析】**

根据奇偶性的定义可判断出①正确; 由周期函数特点知②错误; 函数定义域为  $R$ , 最值点即为极值点, 由  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$

知③错误; 令  $g(x) = f(x) - \frac{1}{x}$ , 在  $x > 0$  和  $x < 0$  两种情况下知  $g(x)$  均无零点, 知④正确.

**【详解】**

由题意得:  $f(x)$  定义域为  $R$ ,

$$\text{Q } f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{\sin x}{x^2 + 1} = -f(x), \therefore f(x) \text{ 为奇函数, 图象关于原点对称, ①正确;}$$

Q  $y = \sin x$  为周期函数,  $y = x^2 + 1$  不是周期函数,  $\therefore f(x)$  不是周期函数, ②错误;

$$\text{Q } f'(x) = \frac{(x^2 + 1)\cos x - 2x\sin x}{(x^2 + 1)^2}, \therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0, \therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ 不是最值, ③错误;}$$

$$\text{令 } g(x) = f(x) - \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x} = \frac{\sin x - x - \frac{1}{x}}{x^2 + 1},$$

当  $x > 0$  时,  $\sin x < x$ ,  $\frac{1}{x} > 0$ ,  $\therefore g(x) < 0$ , 此时  $f(x)$  与  $y = \frac{1}{x}$  无交点;

当  $x < 0$  时,  $\sin x > x$ ,  $\frac{1}{x} < 0$ ,  $\therefore g(x) > 0$ , 此时  $f(x)$  与  $y = \frac{1}{x}$  无交点;

综上所述:  $f(x)$  与  $y = \frac{1}{x}$  无交点, ④正确.

故选: A.

**【点睛】**

本题考查函数与导数知识的综合应用, 涉及到函数奇偶性和周期性的判断、函数最值的判断、两函数交点个数问题的求解; 本题综合性较强, 对于学生的分析和推理能力有较高要求.

8、B

【解析】

设点  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，并设直线  $AB$  的方程为  $x = my + \frac{p}{2}$ ，由  $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$  得  $y_1 = -2y_2$ ，将直线  $AB$  的方程代入韦达定理，求得  $|y_1|$ ，结合  $\triangle ACF$  的面积求得  $p$  的值，结合焦点弦长公式可求得  $|AB|$ 。

【详解】

设点  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，并设直线  $AB$  的方程为  $x = my + p$ ，

将直线  $AB$  的方程与抛物线方程联立  $\begin{cases} x = my + \frac{p}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases}$ ，消去  $x$  得  $y^2 - 2pmy - p^2 = 0$ ，

由韦达定理得  $y_1 + y_2 = 2pm$ ， $y_1y_2 = -p^2$ ，

$\overrightarrow{AF} = \left(\frac{p}{2} - x_1, -y_1\right)$ ， $\overrightarrow{FB} = \left(x_2 - \frac{p}{2}, y_2\right)$ ， $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$ ， $\therefore -y_1 = 2y_2$ ， $\therefore y_1 = -2y_2$ ，

$\therefore y_1y_2 = -2y_2^2 = -p^2$ ，可得  $|y_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}p$ ， $|y_1| = 2|y_2| = \sqrt{2}p$ ，

抛物线的准线  $l$  与  $x$  轴交于  $C\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ ，

$\triangle ACF$  的面积为  $\frac{1}{2} \times p \times \sqrt{2}p = \frac{\sqrt{2}}{2}p^2 = 8\sqrt{2}$ ，解得  $p = 4$ ，则抛物线的方程为  $y^2 = 8x$ ，

所以， $|AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{y_1^2 + y_2^2}{8} + 4 = \frac{5}{8}p^2 + p = 9$ 。

故选：B。

【点睛】

本题考查抛物线焦点弦长的计算，计算出抛物线的方程是解答的关键，考查计算能力，属于中等题。

9、B

【解析】

根据题意可得  $(\sqrt{2}\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ ，利用向量的数量积即可求解夹角。

【详解】

因为  $(\sqrt{2}\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b} \Rightarrow (\sqrt{2}\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$

即  $\sqrt{2}\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2$



$$\text{而 } \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以  $\vec{a}, \vec{b}$  夹角为  $\frac{\pi}{4}$

故选: B

**【点睛】**

本题考查了向量数量积求夹角, 需掌握向量数量积的定义求法, 属于基础题.

10、D

**【解析】**

用收入减去支出, 求得每月收益, 然后对选项逐一分析, 由此判断出说法错误的选项.

**【详解】**

用收入减去支出, 求得每月收益(万元), 如下表所示:

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
收益	20	30	20	10	30	30	60	40	30	30	50	30

所以7月收益最高, A选项说法正确. 4月收益最低, B选项说法正确. 1-6月总收益140万元, 7-12月总收益240万元, 所以前6个月收益低于后6个月收益, C选项说法正确, 后6个月收益比前6个月收益增长  $240 - 140 = 100$  万元, 所以D选项说法错误. 故选D.

**【点睛】**

本小题主要考查图表分析, 考查收益的计算方法, 属于基础题.

11、B

**【解析】**

根据图象以及题中所给的条件, 求出  $A, \omega$  和  $\varphi$ , 即可求得  $f(x)$  的解析式, 再通过平移变换函数图象关于  $y$  轴对称, 求得  $m$  的最小值.

**【详解】**

由于  $AB = 5$ , 函数最高点与最低点的高度差为4,

所以函数  $f(x)$  的半个周期  $\frac{T}{2} = 3$ , 所以  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 6 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3}$ ,

又  $A(-1, 2)$ ,  $0 < \varphi < \pi$ , 则有  $2\sin\left(-1 \times \frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 2$ , 可得  $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ ,

$$\text{所以 } f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{5\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3}(x+1),$$

将函数  $f(x)$  向右平移  $m$  个单位后函数图像关于  $y$  轴对称, 即平移后为偶函数,

所以  $m$  的最小值为 1,

故选: B.

**【点睛】**

该题主要考查三角函数的图象和性质, 根据图象求出函数的解析式是解决该题的关键, 要求熟练掌握函数图象之间的变换关系, 属于简单题目.

12、C

**【解析】**

根据已知条件求得等差数列  $\{a_n\}$  的通项公式, 判断出  $S_n$  最小时  $n$  的值, 由此求得  $S_n$  的最小值.

**【详解】**

依题意  $\begin{cases} a_1 + 2d = -3 \\ 7a_1 + 21d = -7 \end{cases}$ , 解得  $a_1 = -7, d = 2$ , 所以  $a_n = 2n - 9$ . 由  $a_n = 2n - 9 \leq 0$  解得  $n \leq \frac{9}{2}$ , 所以前  $n$  项和中, 前

4 项的和最小, 且  $S_4 = 4a_1 + 6d = -28 + 12 = -16$ .

故选: C

**【点睛】**

本小题主要考查等差数列通项公式和前  $n$  项和公式的基本量计算, 考查等差数列前  $n$  项和最值的求法, 属于基础题.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13、5670

**【解析】**

根据二项式展开的通项, 可得二项式系数的最大项, 可求得其系数.

**【详解】**

二项展开式一共有 9 项, 所以由二项式系数的性质可知二项式系数最大的项为第 5 项, 系数为  $C_8^4 3^4 = 5670$ .

故答案为: 5670

**【点睛】**

本题考查了二项式定理展开式的应用, 由通项公式求二项式系数, 属于中档题.

14、 $\frac{1}{8}$

**【解析】**

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/998046061126007002>