

第二章 直线与圆的方程（压轴题专练）

一、选择题

1. 已知 $m \in \mathbf{R}$ ，若过定点 A 的动直线 $l_1: x - my + m - 2 = 0$ 和过定点 B 的动直线 $l_2: mx + y + 2m - 4 = 0$ 交于点 P（P 与 A，B 不重合），则以下说法错误的是（ ）

A. A 点的坐标为 (2,1)

B. $PA \perp PB$

C. $|PA|^2 + |PB|^2 = 25$

D. $2|PA| + |PB|$ 的最大值为 5

【答案】D

【分析】根据定点判断方法、直线垂直关系、勾股定理、三角函数辅助角求最值即可得解.

【详解】因为 $l_1: x - my + m - 2 = 0$ 可以转化为 $m(1 - y) + x - 2 = 0$,

故直线恒过定点 A(2,1)，故 A 选项正确；

又因为 $l_2: mx + y + 2m - 4 = 0$ 即 $y - 4 = -m(x + 2)$ 恒过定点 B(-2,4)，

由 $l_1: x - my + m - 2 = 0$ 和 $l_2: mx + y - 4 + 2m = 0$ ，满足 $1 \times m + (-m) \times 1 = 0$ ，

所以 $l_1 \perp l_2$ ，可得 $PA \perp PB$ ，故 B 选项正确；

所以 $|PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = (2+2)^2 + (1-4)^2 = 25$ ，故 C 选项正确；

因为 $PA \perp PB$ ，设 $\angle PAB = \theta$, θ 为锐角，

则 $|PA| = 5\cos\theta$, $|PB| = 5\sin\theta$ ，

所以 $2|PA| + |PB| = 5(2\cos\theta + \sin\theta) = 5\sqrt{5}\sin(\theta + \varphi)$ ，所以当 $\sin(\theta + \varphi) = 1$ 时， $2|PA| + |PB|$ 取最大值 $5\sqrt{5}$ ，

故选项 D 错误.

故选：D.

2. 设 $m \in \mathbf{R}$ ，过定点 A 的动直线 $x + my + 1 = 0$ 和过定点 B 的动直线 $mx - y - 2m + 3 = 0$ 交于点 P(x, y)，则

$|PA| + |PB|$ 的最大值（ ）

A. $2\sqrt{5}$

B. $3\sqrt{2}$

C. 3

D. 6

【答案】D

【分析】根据动直线方程求出定点 A, B 的坐标，并判断两动直线互相垂直，进而可得 $|PA|^2 + |PB|^2 = 18$ ，

最后由基本不等式 $\frac{|PA|^2 + |PB|^2}{2} \geq \left(\frac{|PA| + |PB|}{2} \right)^2$ 即可求解.

【详解】解：由题意，动直线 $x + my + 1 = 0$ 过定点 $A(-1, 0)$ ，

直线 $mx - y - 2m + 3 = 0$ 可化为 $(x - 2)m + 3 - y = 0$ ，令 $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 3 - y = 0 \end{cases}$ ，可得 $B(2, 3)$ ，

又 $1 \times m + m \times (-1) = 0$ ，所以两动直线互相垂直，且交点为 P ，

所以 $|PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = (-1 - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 18$ ，

因为 $\frac{|PA|^2 + |PB|^2}{2} \geq \left(\frac{|PA| + |PB|}{2} \right)^2$ ，

所以 $|PA| + |PB| \leq \sqrt{2(|PA|^2 + |PB|^2)} = \sqrt{2 \times 18} = 6$ ，当且仅当 $|PA| = |PB| = 3$ 时取等号.

故选：D.

3. 在平面直角坐标系内，设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ 为不同的两点，直线 l 的方程为 $ax + by + c = 0$ ，

$\delta = \frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}$ ，下面四个命题中的假命题为 ()

A. 存在唯一的实数 δ ，使点 N 在直线 l 上

B. 若 $\delta = 1$ ，则过 M ， N 两点的直线与直线 l 平行

C. 若 $\delta = -1$ ，则直线经过线段 M ， N 的中点；

D. 若 $\delta > 1$ ，则点 M ， N 在直线 l 的同侧，且直线 l 与线段 M ， N 的延长线相交；

【答案】A

【分析】根据题意对 δ 一一分析，逐一验证.

【详解】解：对于 A， $\delta = \frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}$ 化为： $ax_1 + by_1 + c - \delta(ax_2 + by_2 + c) = 0 (ax_2 + by_2 + c \neq 0)$ ，即点 $N(x_2, y_2)$

不在直线 l 上，因此 A 不正确.

对于 B， $\delta = 1$ ，则 $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$ ，即过 M ， N 两点的直线与直线 l 的斜率相等，又点 $N(x_2, y_2)$ 不在直线 l 上，因此两条直线平行，故 B 正确；

对于 C， $\delta = -1$ ，则 $ax_1 + by_1 + c + (ax_2 + by_2 + c) = 0$ ，化为 $a \frac{x_1 + x_2}{2} + b \frac{y_1 + y_2}{2} + c = 0$ ，因此直线 l 经过线段 MN 的中点，故 C 正确；

对于 D， $\delta > 1$ ，则 $(ax_1 + by_1 + c) \times (ax_2 + by_2 + c) = \delta(ax_2 + by_2 + c)^2 > 0$ ，则点 M ， N 在直线 l 的同侧，故 D 正确；
故选 A

【点睛】本题考查了直线系方程的应用、平行直线的判定、点与直线的位置关系，考查了推理能力与计算

能力，属于难题.

4. 我国著名数学家华罗庚曾说“数缺形时少直观，形少数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休.”事

实上，很多代数问题可以都转化为几何问题加以解决，列如，与 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 相关的代数问题，可以

转化为点 (x,y) 与点 (a,b) 之间的距离的几何问题.已知点 $M(x_1,y_1)$ 在直线 $l_1:y=x+2$ ，点 $N(x_2,y_2)$ 在直线

$l_2:y=x$ 上，且 $MN \perp l_1$ ，结合上述观点， $\sqrt{x_1^2+(y_1-4)^2}+\sqrt{(x_2-5)^2+y_2^2}$ 的最小值为（ ）

A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{11\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{41}-\sqrt{2}$

D. 5

【答案】D

【分析】根据两点距离公式将目标函数转化为点 $M(x_1,y_1)$ 到点 $A(0,4)$ 的距离与点 $N(x_2,y_2)$ 到点 $B(5,0)$ 的距

离和，过点A作 $AC \perp l_1$ ，垂足为C，证明 $|AM|=|CN|$ ，由 $|CN|+|NB| \geq |CB|$ 求目标函数最小值.

【详解】由已知 $\sqrt{x_1^2+(y_1-4)^2}$ 表示点 $M(x_1,y_1)$ 到点 $A(0,4)$ 的距离，

$\sqrt{(x_2-5)^2+y_2^2}$ 表示点 $N(x_2,y_2)$ 到点 $B(5,0)$ 的距离，

所以 $\sqrt{x_1^2+(y_1-4)^2}+\sqrt{(x_2-5)^2+y_2^2}=|MA|+|NB|$ ，

过点A作 $AC \perp l_1$ ，垂足为C，

因为直线 l_1 的方程为 $x-y+2=0$ ， $A(0,4)$ ，

所以 $|AC|=\frac{|0-4+2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$ ，

又直线 $l_1:y=x+2$ 与直线 $l_2:y=x$ 平行， $MN \perp l_1$ ，

所以 $|MN|=\frac{|2-0|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$ ，

所以 $MN \parallel AC, |MN|=|AC|$ ，

所以四边形AMNC为平行四边形，

所以 $|AM|=|CN|$ ，

所以 $\sqrt{x_1^2+(y_1-4)^2}+\sqrt{(x_2-5)^2+y_2^2}=|CN|+|NB|$ ，

又 $|CN|+|NB| \geq |CB|$ ，

当且仅当C,N,B三点共线时等号成立，

所以当点N为线段CB与直线 l_2 的交点时，

$\sqrt{x_1^2 + (y_1 - 4)^2} + \sqrt{(x_2 - 5)^2 + y_2^2}$ 取最小值，最小值为 $|CB|$ ，

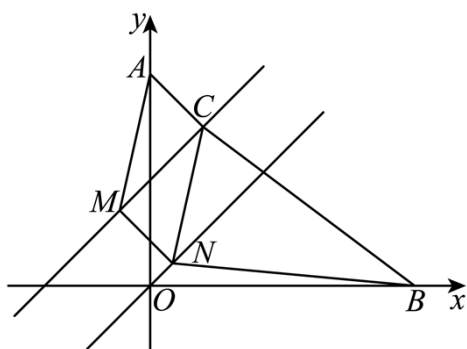
因为过点 $A(0, 4)$ 与直线 l_1 垂直的直线的方程为 $y = -x + 4$ ，

联立 $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$ ，可得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ ，

所以点 C 的坐标为 $(1, 3)$ ，所以 $|CB| = \sqrt{(5-1)^2 + (0-3)^2}$ ，

所以 $\sqrt{x_1^2 + (y_1 - 4)^2} + \sqrt{(x_2 - 5)^2 + y_2^2}$ 的最小值为 5，

故选：D.



【点睛】本题解决的关键在于根据两点距离公式将目标函数转化为求线段的距离和问题，进一步结合图形将问题转化为两点之间的距离问题.

5. 已知圆 C 是以点 $M(2, 2\sqrt{3})$ 和点 $N(6, -2\sqrt{3})$ 为直径的圆，点 P 为圆 C 上的动点，若点 $A(2, 0)$ ，点 $B(1, 1)$ ，则 $2|PA| - |PB|$ 的最大值为 ()

A. $\sqrt{26}$

B. $4 + \sqrt{2}$

C. $8 + 5\sqrt{2}$

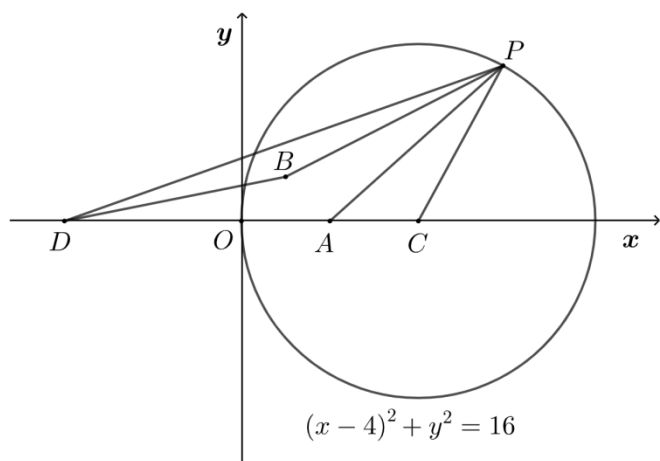
D. $\sqrt{2}$

【答案】A

【分析】由题设可知圆 $C: (x-4)^2 + y^2 = 16$ ，在坐标系中找到 $D(-4, 0)$ ，应用三角线相似将 $2|PA|$ 转化到 $|PD|$ ，再利用三角形的三边关系确定目标式的最大值即可.

【详解】由题设，知： $C(4, 0)$ 且 $|MN| = \sqrt{(-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2 + (6-2)^2} = 8$ ，即圆 C 的半径为 4，

$\therefore$ 圆 $C: (x-4)^2 + y^2 = 16$ ，



如上图，坐标系中 $D(-4,0)$ 则 $OD = 2AC = CP = OC = 4$ ，

$\therefore \frac{AC}{CP} = \frac{PC}{DC} = \frac{1}{2}$ ，即 $\triangle APC \sim \triangle PCD$ ，故 $\frac{PA}{PD} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore 2|PA| - |PB| = |PD| - |PB|$ ，在 $\triangle PBD$ 中 $|PD| - |PB| < |BD|$ ，

$\therefore$ 要使 $|PD| - |PB|$ 最大， P, B, D 共线且最大值为 $|BD|$ 的长度。

$\therefore |BD| = \sqrt{(1+4)^2 + 1} = \sqrt{26}$ 。

故选：A

【点睛】关键点点睛：首先求出圆 C 方程，找到定点 D 使 $\frac{AC}{CP} = \frac{PC}{DC}$ ，进而将 $2|PA|$ 转化到其它线段，结合三角形三边关系求目标式的最值。

6. 过点 $A(-8,4)$ 作抛物线 $y^2 = 8x$ 的两条切线 l_1, l_2 ，设 l_1, l_2 与 y 轴分别交于点 B, C ，则 $\triangle ABC$ 的外接圆方程为 ()

A. $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 16 = 0$

B. $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$

C. $x^2 + y^2 + 5x - 6y - 12 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 4y - 16 = 0$

【答案】A

【解析】设切线方程为 $l: x+8=t(y-4)$ ，与抛物线联立，表示线段 AB 的中垂线方程，可求解圆心坐标和半径，表示圆的方程即可。

【详解】设过点 $A(-8,4)$ 的抛物线 $E: y^2 = 8x$ 的切线方程为 $l: x+8=t(y-4)$ ，

即 $x = ty - 8 - 4t$ (*)，

代入 $y^2 = 8x$ 得 $y^2 - 8ty + 8(4t+8) = 0$ ，

由 $\Delta = 0$ 得 $t^2 - 2t - 4 = 0$ ，(1)

所以方程 (1) 有两个不相等的实数根 t_1, t_2 ，

且 $t_1 + t_2 = 2$, $t_1 t_2 = -4$,

在 (*) 中令 $x=0$ 得 $B\left(0, 4 + \frac{8}{t_1}\right)$, $C\left(0, 4 + \frac{8}{t_2}\right)$,

设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为点 $O_1(x_0, y_0)$,

则 $y_0 = \frac{1}{2}(y_B + y_C) = 2$,

下求 x_0 : 线段 AB 中点横标 $x_0' = -4$, 纵标 $y_0' = 4 + \frac{4}{t_1}$,

线段 AB 的中垂线方程为 $y - 4 - \frac{4}{t_1} = -t_1(x + 4)$,

令 $y=2$ 得 $x_0 = \frac{-4t_1^2 + 2t_1 + 4}{t_1^2}$,

由 (1) 知 $2t_1 + 4 = t_1^2$, 故 $x_0 = -3$,

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R ,

则 $R^2 = 29$,

所以 $\triangle ABC$ 的外接圆方程为 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 29$,

即 $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 16 = 0$.

故选: A

【点睛】本题考查了直线和抛物线的位置关系, 圆的方程, 考查了学生综合分析, 转化划归, 数学运算的能力, 属于中档题.

7. 已知平面内两个定点 A, B 及动点 P, 若 $\frac{|PB|}{|PA|} = \lambda$ ($\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$), 则点 P 的轨迹是圆. 后世把这种圆称为阿波罗尼斯圆. 已知 $O(0, 0)$, $Q\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 直线 $l_1: kx - y + 2k + 3 = 0$, 直线 $l_2: x + ky + 3k + 2 = 0$, 若 P 为 l_1 ,

l_2 的交点, 则 $3|PO| + 2|PQ|$ 的最小值为 ()

A. $3\sqrt{3}$

B. $6 - 3\sqrt{2}$

C. $9 - 3\sqrt{2}$

D. $3 + \sqrt{6}$

【答案】A

【分析】由直线方程可得 $l_1 \perp l_2$, 则点 P 的轨迹是以 CD 为直径的圆, 除去 D 点, 得到 P 的轨迹方程为

$(x+2)^2 + y^2 = 9(y \neq -3)$, 即 $x^2 + y^2 + 4x = 5(y \neq -3)$, 可得 $\frac{3}{2}|PQ| = \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2} (y \neq -3)$, 取 $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, 则

$\frac{3}{2}|PQ|=|PA|$ ，结合 $|AQ|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，可得 $3|PO|+2|PQ|=2(|PA|+|PQ|)\geq 2|AQ|$ ，进而求解。

【详解】由已知 $l_1: kx-y+2k+3=0$ 过定点 $C(-2,3)$ ，

$l_2: x+ky+3k+2=0$ 过定点 $D(-2,-3)$ ，

因为 $k_{l_1}=k$ ， $k_{l_2}=-\frac{1}{k}$ ，所以 $k_{l_1}\cdot k_{l_2}=-1$ ，即 $l_1\perp l_2$ ，

所以点 P 的轨迹是以 CD 为直径的圆，除去 D 点，故圆心为 $(-2,0)$ ，半径为 3，

则 P 的轨迹方程为 $(x+2)^2+y^2=9(y\neq-3)$ ，即 $x^2+y^2+4x=5(y\neq-3)$ ，易知 O, Q 在该圆内，

$$\text{又 } \frac{3}{2}|PO|=\sqrt{\frac{9}{4}(x^2+y^2)}=\sqrt{\frac{9}{4}(x^2+y^2)-\frac{5}{4}\times 9+\frac{45}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}(x^2+y^2)-\frac{5}{4}[(x+2)^2+y^2]}+\frac{45}{4},$$

$$\text{即 } \frac{3}{2}|PO|=\sqrt{x^2-5x+y^2+\frac{25}{4}}=\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2}(y\neq-3),$$

$$\text{取 } A\left(\frac{5}{2}, 0\right), \text{ 则 } \frac{3}{2}|PO|=|PA|, \text{ 又 } |AQ|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-0\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } 3|PO|+2|PQ|=2\left(\frac{3}{2}|PO|+|PQ|\right)=2(|PA|+|PQ|)\geq 2|AQ|=3\sqrt{3},$$

所以 $3|PO|+2|PQ|$ 的最小值为 $3\sqrt{3}$ 。

故选：A。

8. 已知点 P 为直线 $l: x+y-2=0$ 上的动点，过点 P 作圆 $C: x^2+2x+y^2=0$ 的切线 PA, PB ，切点为

A, B ，当 $|PC|\cdot|AB|$ 最小时，直线 AB 的方程为（ ）

A. $3x+3y+1=0$

B. $3x+3y-1=0$

C. $2x+2y+1=0$

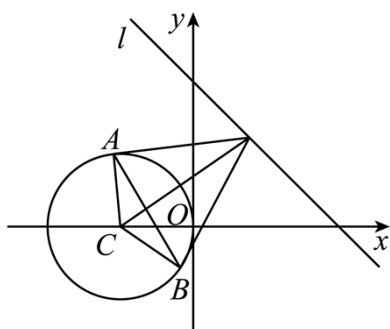
D. $2x+2y-1=0$

【答案】A

【分析】先利用圆切线的性质推得 A, P, B, C 四点共圆， $AB\perp CP$ ，从而将 $|PC|\cdot|AB|$ 转化为 $2|PA|$ ，进而确定 $PC\perp l$ 时 $|PC|\cdot|AB|$ 取得最小值，再求得以 PC 为直径的圆的方程，由此利用两圆相交弦方程的求法即可得解。

【详解】因为圆 $C: x^2+2x+y^2=0$ 可化为 $(x+1)^2+y^2=1$ ，

所以圆心 $C(-1,0)$ ，半径为 $r=1$ ，



因为 PA, PB 是圆 C 的两条切线，则 $PA \perp AC, PB \perp BC$,

由圆的知识可知， A, P, B, C 四点共圆，且 $AB \perp CP, PA = PB$,

所以 $|PC| \cdot |AB| = 4S_{\triangle PAC} = 4 \times \frac{1}{2} \times |PA| \times |AC| = 2|PA|$ ，又 $|PA| = \sqrt{|PC|^2 - 1}$,

所以当 $|PC|$ 最小，即 $PC \perp l$ 时， $|PC| \cdot |AB|$ 取得最小值，此时 PC 的方程为 $y = x + 1$,

联立 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$ ，解得 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}$ ，即 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$,

故以 PC 为直径的圆的方程为 $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1) + y\left(y - \frac{3}{2}\right) = 0$ ，即 $x^2 + \frac{1}{2}x + y^2 - \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} = 0$,

又圆 $C: x^2 + 2x + y^2 = 0$,

两圆的方程相减即为直线 AB 的方程: $3x + 3y + 1 = 0$.

故选: A.

【点睛】关键点睛: 本题解决的关键是将 $|PC| \cdot |AB|$ 转化为 $2|PA|$ ，从而确定 $|PC| \cdot |AB|$ 最小时 P 的坐标，从而利用两圆相减可得相交弦方程的技巧得解.

9. (多选) 已知 O 为坐标原点， $A(3, 1)$ ， P 为 x 轴上一动点， Q 为直线 $l: y = x$ 上一动点，则 ()

A. $\triangle APQ$ 周长的最小值为 $4\sqrt{2}$

B. $|AP| + |AQ|$ 的最小值为 $1 + \sqrt{2}$

C. $|AP| + |PQ|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$

D. $\sqrt{2}|AP| + |OP|$ 的最小值为 4

【答案】BCD

【分析】设 A 关于直线 $l: y = x$ 的对称点为 $A_1(1, 3)$ ， A 关于 x 轴的对称点为 $A_2(3, -1)$ ，对于 A: 根据对称性可得 $|PQ| + |QA| + |PA| = |PQ| + |QA_1| + |PA_2| \geq |A_1A_2|$ ，进而可得结果；对于 B: 根据点到直线的距离分析判断；

对于 C: 因为 $|AP| + |PQ| = |A_2P| + |PQ|$ ，结合点到直线的距离分析判断；对于 D: 根据题意分析可得

$\sqrt{2}|AP| + |OP| = \sqrt{2}(|A_2P| + |CP|)$ ，结合点到直线的距离分析判断.

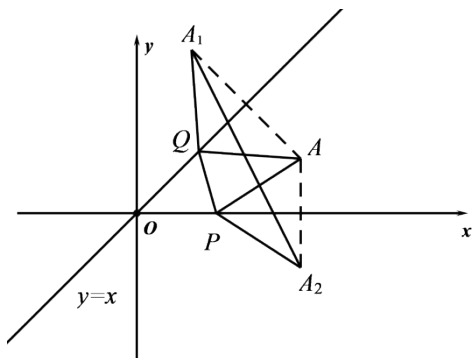
【详解】设 $A(3,1)$ 关于直线 $l: y=x$ 的对称点为 $A_1(1,3)$ ， $A(3,1)$ 关于 x 轴的对称点为 $A_2(3,-1)$ ，

可知 $|QA|=|QA_1|, |PA|=|PA_2|$ ，

对于选项 A：可得 $\triangle APQ$ 周长 $|PQ|+|QA|+|PA|=|PQ|+|QA_1|+|PA_2| \geq |A_1A_2| = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$ ，

当且仅当 A_1, P, Q, A_2 四点共线时，等号成立，

所以 $\triangle APQ$ 周长的最小值为 $2\sqrt{5}$ ，故 A 错误；

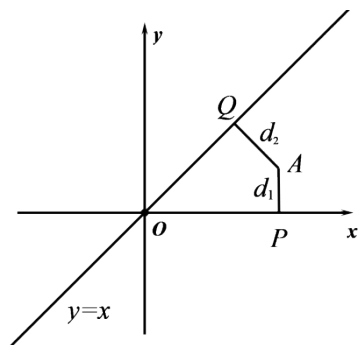


对于选项 B：设 $A(3,1)$ 到 x 轴，直线 $l: x-y=0$ 的距离分别为 d_1, d_2 ，

$$\text{则 } d_1=1, d_2=\frac{|3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2},$$

可得 $|AP|+|AQ| \geq d_1+d_2=1+\sqrt{2}$ ，

所以 $|AP|+|AQ|$ 的最小值为 $1+\sqrt{2}$ ，故 B 正确；

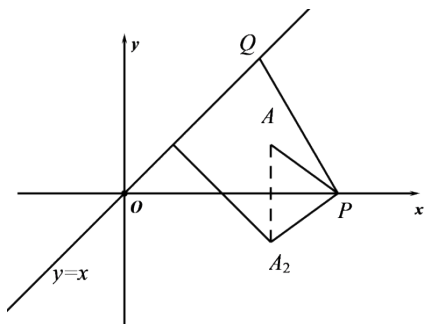


对于选项 C：因为 $|AP|+|PQ|=|A_2P|+|PQ|$ ，

$$\text{设 } A_2(3,-1) \text{ 到直线 } l: x-y=0 \text{ 的距离为 } d_3=\frac{|3-(-1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2},$$

可得 $|A_2P|+|PQ| \geq d_3=2\sqrt{2}$ ，

所以 $|AP|+|PQ|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$ ，故 C 正确；



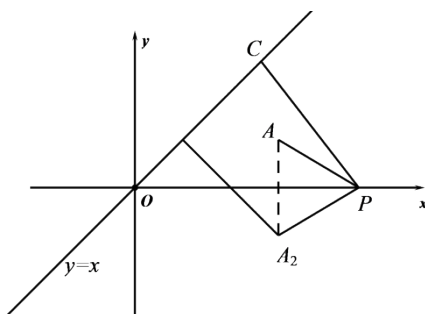
对于选项 D: 作 $PC \perp l$, 垂足为 C ,

因为直线 l 的斜率 $k=1$, 则 $\angle COP = 45^\circ$, 可得 $|CP| = \frac{\sqrt{2}}{2}|OP|$,

则 $|AP| + |CP| = |A_2P| + |CP| \geq d_3 = 2\sqrt{2}$,

可得 $\sqrt{2}|AP| + |OP| = \sqrt{2}\left(|A_2P| + \frac{\sqrt{2}}{2}|OP|\right) = \sqrt{2}(|A_2P| + |CP|) \geq \sqrt{2}d_3 = 4$,

所以 $\sqrt{2}|AP| + |OP|$ 的最小值为 4, 故 D 正确;



故选: BCD.

二、填空题

10. 设 $m \in \mathbb{R}$, 过定点 A 的动直线 $x + my + 1 = 0$ 和过定点 B 的动直线 $mx - y - 2m + 3 = 0$ 交于点 $P(x, y)$, 则 $|PA| \cdot |PB|$ 的最大值_____.

【答案】9

【分析】根据直线方程求出定点, 然后根据直线垂直, 结合基本不等式求解即可;

【详解】由题意, 动直线 $x + my + 1 = 0$ 过定点 $A(-1, 0)$,

直线 $mx - y - 2m + 3 = 0$ 可化为 $(x - 2)m + 3 - y = 0$,

令 $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 3 - y = 0 \end{cases}$, 可得 $B(2, 3)$,

又 $1 \times m + m \times (-1) = 0$, 所以两动直线互相垂直, 且交点为 P ,

所以 $|PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = (-1 - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 18$,

因为 $18 = |PA|^2 + |PB|^2 \geq 2|PA| \cdot |PB|$,

所以 $|PA| \cdot |PB| \leq 9$, 当且仅当 $|PA| = |PB| = 3$ 时取等号.

【点睛】根据直线方程求定点, 判断直线垂直, 将问题转化为基本不等式是本题的难点和突破点.

11. 若恰有三组不全为 0 的实数对 (a, b) 满足关系式 $|a+b+1| = |4a-3b+1| = t\sqrt{a^2+b^2}$, 则实数 t 的所有可能的值为_____.

【答案】 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{7}{5}$ 或 $\frac{7\sqrt{29}}{29}$

【分析】化简得到 $\frac{|a+b+1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4a-3b+1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = t$, 然后对 t 进行分类讨论即可求解.

【详解】由已知得 $t > 0$, 整理得 $\frac{|a+b+1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4a-3b+1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = t$,

看成有且仅有三条直线满足 $A(1,1)$ 和 $B(4,-3)$ 到直线 $l: ax+by+1=0$ (不过原点) 的距离 t 相等,

又 $|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (-3-1)^2} = 5$,

(1) 当 $t = \frac{|AB|}{2} = \frac{5}{2}$, 此时易得符合题意的直线 l 为线段 AB 的垂直平分线 $6x-8y-23=0$ 以及与直线 AB 平行的两条直线 $8x+6y+11=0$ 和 $8x+6y-39=0$;

(2) 当 $t < \frac{|AB|}{2} = \frac{5}{2}$ 时, 有 4 条直线 l 会使得点 $A(1,1)$ 和 $B(4,-3)$ 到它们的距离相等, 注意到 l 不过原点, 所以当其中一条直线过原点时, 会作为增根被舍去.

设点 A 到 l 的距离为 d ,

①作为增根被舍去的直线 l , 过原点和 A, B 的中点 $M(\frac{5}{2}, -1)$, 其方程为 $2x+5y=0$, 此时 $t = d = \frac{7}{\sqrt{29}} < \frac{5}{2}$, 符合;

②作为增根被舍去的直线 l , 过原点且与 AB 平行, 其方程为 $4x+3y=0$, 此时 $t = d = \frac{7}{5} < \frac{5}{2}$, 符合;

综上, 满足题意的实数 t 为 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{7}{5}$ 或 $\frac{7\sqrt{29}}{29}$.

故答案为: $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{7}{5}$ 或 $\frac{7\sqrt{29}}{29}$.

【点睛】关键点点睛: 本题的关键是化简得到 $\frac{|a+b+1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4a-3b+1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = t$, 将问题转化为有且仅有三条直线满足 $A(1,1)$ 和 $B(4,-3)$ 到直线 $l: ax+by+1=0$ (不过原点) 的距离 t 相等, 然后分类讨论即得.

12. 已知 P, Q 分别在直线 $l_1: x-y+1=0$ 与直线 $l_2: x-y-1=0$ 上, 且 $PQ \perp l_1$, 点 $A(-4,4)$, $B(4,0)$, 则

$|AP| + |PQ| + |QB|$ 的最小值为_____.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/998071070027006050>