备考辅导系列

重点难点梯次总结汇编

精华考点合理提炼编排

不同模块全面备考提升

精选真题发现考试规律

章节训练逐一击破短板

全真模拟精确预测趋势

思维拓展强化考前冲刺

# 第一章 向量和坐标

## 一、向量的概念★★

既有大小又有方向的量叫做向量，或称为矢量，简称矢.

向量的大小叫做向量的模，也称向量的长度. 向量 $\mathbf{AB}$ 与 $\vec{a}$ 的模分别记做 $|\mathbf{AB}|$ 与 $|\vec{a}|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量，模等于 0 的向量叫做零向量。

如果两个向量的模相等且方向相同，那么叫做相等向量，记做 $\vec{a}=\vec{b}$ .

## 二、 向量的运算★★★★★

1、已知空间中任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则向量

$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

2、已知向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

（1）向量 $\vec{a}$ 的模为 $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}$

（2） $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$

（3） $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$

3、向量的数量积（内积） $\vec{a}\cdot\vec{b}$

（1） $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos<\vec{a},\vec{b}>$

（2） $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

其中 $<\vec{a},\vec{b}>$ 为向量 $\vec{a}$ , $\vec{b}$ 的夹角，且 $0\le<\vec{a},\vec{b}>\le\pi$

注意：利用向量的内积可求直线与直线的夹角、直线与平面的夹角、平面与平面的夹角。

4、（1） $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$

（2） $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

（3）三个非零向量 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$， $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ 和 $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$，共面的充

要条件是$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$.

**例 1.** $\vec{a}=(6,x,-4)$，$\vec{b}=(y,-2,-2)$，已知$\vec{a}//\vec{b}$，求$x,y$的值分别是（　　）

A. 4，-3　　　　B. -3，-4

C. -3，4　　　　D. -4，3

**解析**：由于$\vec{a}//\vec{b}$，即$\dfrac{6}{y}=\dfrac{x}{-2}=\dfrac{-4}{-2}$，故$x=-4,y=3$，故选 D.

**例 2.** 已知向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}=\{-1,2,1\}$平行，与向量$\vec{c}=\{1,2,-1\}$的数量积为 6，则向量$\vec{a}$为（　）

A. $\{-3,6,-3\}$　　　　B. $\{3,6,3\}$

C. $\{3,6,-3\}$　　　　D. $\{-3,6,3\}$

【解析】由$\vec{a}$与$\vec{b}=\{-1,2,1\}$平行，故设$\vec{a}=\{-\lambda,2\lambda,\lambda\}$，且

$\vec{a}\ \vec{c}=-\lambda\times1+2\lambda\times2+\lambda\times(-1)=2\lambda=6$，故$\lambda=3$，即$\vec{a}=\{-3,6,3\}$，故选 D.

**例 3** 已知矢量$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$的分量如下：

(1) $\vec{a}=\{0,-1,2\}$，$\vec{b}=\{0,2,-4\}$，$\vec{c}=\{1,2,-1\}$；

(2) $\vec{a}=\{1,2,3\}$，$\vec{b}=\{2,-1,0\}$，$\vec{c}=\{0,5,6\}$.

试判别它们是否共面？能否将$\vec{c}$表成$\vec{a}$，$\vec{b}$的线性组合？若能表示，写出表示式.

**解：** (1) 因为$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$,所以 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 三矢量共面,

又因为$\vec{a}$, $\vec{b}$的对应坐标成比例，即$\vec{a}//\vec{b}$，但$\vec{c}\not\parallel\vec{a}$，

故不能将$\vec{c}$表成$\vec{a}$, $\vec{b}$的线性组合.

(2) 因为$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}=0$,所以 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 三矢量共面.

又因为 $\vec{a}$, $\vec{b}$的对应坐标不成比例，即$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$，

故可以将$\vec{c}$表成$\vec{a}$, $\vec{b}$的线性组合.

设 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，亦即$\{0, 5, 6\}=\lambda\{1, 2, 3\}+\mu\{2, -1, 0\}$

从而

$$\begin{cases}\lambda+2\mu=0,\\ 2\lambda-\mu=0,\\ 3\lambda=6.\end{cases}$$

解得 $\lambda=2$，$\mu=-1$,

所以 $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$

**5、向量的向量积**（外积）$\vec{a}\times\vec{b}$（遵循右手原则，且$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$、$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$）

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

**例 4.** 设 $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，则 $\vec{a}\times\vec{b}=$（ D ）

A. $(1,1,1)$　　B. $(1,2,3)$　　C. $(5,1,6)$　　D. $(5,1,7)$

**解析:** $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}=\{5,1,7\}$.

**例 5.** 设 $\vec{a}=(2,1,-1)$，$\vec{b}=(1,-1,2)$，则 $\vec{a}\times\vec{b}$.

**解析:**

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}=\{1,-5,-3\}.$$

**例 6.** 已知三角形 $ABC$ 的顶点分别是 $A(1,2,3)$、$B(3,4,5)$ 和 $C(2,4,7)$，求三角形 $ABC$ 的面积.

**解析:** 根据向量积的定义，可知三角形 $ABC$ 的面积

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\angle A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$，由于 $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k},$$